

САММАТ-2022
Решение задач 7 класса

Задача №1. В классе присутствуют учитель и несколько учеников. Найти число учеников, если возраст учителя на 24 года больше среднего возраста учеников и на 20 лет больше среднего возраста всех присутствующих в классе.

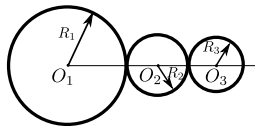
Решение: Обозначим n — число учеников, m — их средний возраст, отсюда получим возраст учителя: $m + 24$. Сумма $nm + m + 24$ даёт сумму всех возрастов. Теперь, учитывая, что в классе $n + 1$ человек, легко найти их средний возраст: $m + \frac{24}{n + 1}$. Из условия задачи теперь получаем:

$$m + 24 = m + \frac{24}{n + 1} + 20.$$

Отсюда: $n = 5$.

Ответ: 5.

Задача №2. Центры трех кругов с радиусами $R_1 = 78$ см, $R_2 = 30$ см и $R_3 = 24$ см расположены на одной прямой так, что круги касаются друг друга (см. рис.) и могут вращаться вокруг своих центров. Первый круг начинает вращаться, приводя во вращение второй и третий круг. Все круги вращаются без проскальзывания друг относительно друга. За какое минимальное количество оборотов второго круга система из трех кругов примет исходное (начальное) состояние?



Решение: Для решения найдем наименьшее общее кратное чисел 78, 24 и 30: $78 = 13 \cdot 2 \cdot 3$; $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$; $24 = 2 \cdot 3 \cdot 4$. НОК = $13 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 5 = 1560$. Тогда количество оборотов $n_1 = 1560 : 78 = 20$; $n_2 = 1560 : 30 = 52$; $n_3 = 1560 : 24 = 65$.

Ответ: $n_2 = 52$ оборота.

Задача №3. Решить уравнение: $\frac{(n - 2)!}{n!} + \frac{(n - 1)!}{(n + 1)!} = \frac{1}{12}$. Указание: $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n - 1) \cdot n$.

Решение: $\frac{(n - 2)!}{n(n - 1)(n - 2)!} + \frac{(n - 1)!}{(n + 1)n(n - 1)!} = \frac{1}{12} \Rightarrow \frac{1}{n(n - 1)} + \frac{1}{(n + 1)n} = \frac{1}{12} \Rightarrow \frac{2n}{n(n - 1)(n + 1)} = \frac{1}{12} \Rightarrow \frac{1}{(n - 1)(n + 1)} = \frac{1}{24} \Rightarrow 24 = n^2 - 1 \Rightarrow n^2 = 25 \Rightarrow n = 5, n = -5 \notin \mathbb{N}$ ($\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ — множество натуральных чисел).

Ответ: $n = 5$.

Задача №4. При каких натуральных значениях n число $n^{n+1} - 2n^2 + 2n - 1$ нацело делится на $(n - 1)^2$?

Решение: Заметим, что $(n - 1)^2 = n^2 - 2n + 1$ и запишем число $n^{n+1} - 2n^2 + 2n - 1$ в виде

$$n^{n+1} - 2n^2 + 2n - 1 = n^{n+1} - n^2 - n^2 + 2n - 1 = n^{n+1} - n^2 - (n - 1)^2,$$

поэтому данное число делится на $(n - 1)^2$ тогда и только тогда, когда $n^{n+1} - n^2$ делится на $(n - 1)^2$. Преобразуем данное число к виду

$$n^{n+1} - n^2 = n^2 \cdot n^{n-1} - n^2 = n^2(n^{n-1} - 1)$$

и заметим, что числа $(n-1)^2$ и n^2 — взаимно простые, поскольку числа $n-1$ и n — взаимно простые. Следовательно, нужно, чтобы число $n^{n-1} - 1$ делилось на $(n-1)^2$. Заметим, что это число можно записать в виде

$$\begin{aligned} n^{n-1} - 1 &= n^{n-1} - n^{n-2} + n^{n-2} - n^{n-3} + n^{n-3} - n^{n-4} + \dots + n^3 - n^2 + n^2 - n + n - 1 = \\ &= n^{n-2}(n-1) + n^{n-3}(n-1) + n^{n-4}(n-1) + \dots + n^2(n-1) + n(n-1) + n - 1 = \\ &= (n-1)(n^{n-2} + n^{n-3} + n^{n-4} + \dots + n^2 + n + 1), \end{aligned}$$

поэтому это число делится на $n-1$ и, значит, чтобы оно делилось на $(n-1)^2$, нужно, чтобы число $n^{n-2} + n^{n-3} + n^{n-4} + \dots + n^2 + n + 1$ делилось на $n-1$.

Найдем остаток от деления числа $n^{n-2} + n^{n-3} + n^{n-4} + \dots + n^2 + n + 1$ на число $n-1$. Так как остаток от деления числа n на число $n-1$ равен 1, тогда остаток от деления чисел $n^{n-2}, n^{n-3}, n^{n-4}, \dots, n^2$ равен степени 1, то есть тоже равен 1. Поэтому остаток от деления числа $n^{n-2} + n^{n-3} + n^{n-4} + \dots + n^2 + n + 1$ на число $n-1$ при любом n равен сумме

$$\underbrace{1 + 1 + 1 + \dots + 1 + 1 + 1}_{n-1} = n - 1$$

или равен нулю. Это означает, что, то есть число $n^{n-2} + n^{n-3} + n^{n-4} + \dots + n^2 + n + 1$ делится на число $n-1$ при любом натуральном n .

Ответ: При любом натуральном n .

Задача №5. Каким минимальным количеством ящиков в форме куба можно полностью заполнить склад, представляющий прямоугольный параллелепипед с длиной 728 см, шириной 616 см и высотой 399 см? (Суммарный объем ящиков должен равняться объему параллелепипеда).

Решение: Пусть a , b и c — измерения параллелепипеда. Найдем делители каждой величины.

$$a = 728 = 7 \cdot 8 \cdot 13; \quad b = 616 = 7 \cdot 8 \cdot 11; \quad c = 399 = 3 \cdot 7 \cdot 19.$$

Наибольший общий делитель равен 7. Тогда количество ящиков будет следующим

$$8 \cdot 11 \times 8 \cdot 13 \times 19 \cdot 3 = 88 \cdot 104 \cdot 57 = 521664.$$

Ответ: 521664.

Задача №6. Две коробки конфет и 3 пачки чая стоят 910 рублей, а три коробки конфет и 5 пачек чая стоят 1440 рублей. Сколько стоят 4 коробки конфет и 2 пачки чая?

Решение: Пусть x — стоимость коробки конфет, y — стоимость пачки чая. Тогда

$$\begin{cases} 2x + 3y = 910 \\ 3x + 5y = 1440 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6x + 9y = 2730 \\ 6x + 10y = 2880 \end{cases} \Rightarrow y = 150 \text{ р.}$$

Тогда $x = (910 - 3y)/2 = (910 - 450)/2 = 230$ р.

$4x + 2y = 4 \cdot 230 + 2 \cdot 150 = 1220$ р. — стоимость 4 коробок конфет и 2 пачек чая.

Ответ: 1220 р.

Задача №7. Найти все целые значения m , при которых дробь $\frac{3m+2}{m-4}$ является натуральным числом.

Решение: Представим исходную дробь в виде $\frac{3m+2}{m-4} = 3 + \frac{14}{m-4}$. Дробь представляет натуральное число, если $\frac{14}{m-4} > -3$ и число 14 нацело делится на $m-4$, т.е. $m-4$ может принимать значения $\pm 1, \pm 2, \pm 7, \pm 14$. Проверим все значения $m = 4$:

1) $m - 4 = \pm 1 \Rightarrow m = 5; m = 3$; при $m = 5$ имеем $\frac{3m+2}{m-4} = 17$ (решение).

Аналогично при $m = 3$ $\frac{3m+2}{m-4} = -11$ (не подходит).

2) $m - 4 = \pm 2 \Rightarrow m = 6 \Rightarrow \frac{3m+2}{m-4} = 10$ ($m = 6$ решение); $m = 2 \Rightarrow \frac{3m+2}{m-4} = -4$ (не подходит).

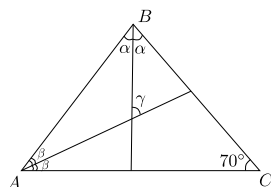
3) $m - 4 = \pm 7 \Rightarrow m = 11 \Rightarrow \frac{3m+2}{m-4} = 5$ ($m = 11$ решение); $m = -3 \Rightarrow \frac{3m+2}{m-4} = 1$ ($m = -3$ решение).

2) $m - 4 = \pm 14 \Rightarrow m = 18 \Rightarrow \frac{3m+2}{m-4} = 4$ ($m = 18$ решение); $m = -10 \Rightarrow \frac{3m+2}{m-4} = 2$ ($m = -10$ решение).

Таким образом, при значениях $m = \{5; 6; 11; 18; -3; -10\}$ дробь $\frac{3m+2}{m-4}$ — натуральное число.

Ответ: $m = \{5; 6; 11; 18; -3; -10\}$.

Задача №8. В треугольнике ABC угол $\angle C = 70^\circ$. Найти острый угол между биссектрисами углов $\angle A$ и $\angle B$.



Решение: Пусть γ — искомый угол. Из рисунка следует, что $\gamma = \alpha + \beta$ и $2\alpha + 2\beta + 70^\circ = 180^\circ$. Тогда $2(\alpha + \beta) = 110^\circ \Rightarrow \alpha + \beta = 55^\circ$ и искомый угол 55° .

Ответ: 55° .

Задача №9. Найдите числа $\overline{abc5}$ и \overline{mn} , если они удовлетворяют условию $\overline{abc5} : 11 = \overline{mn}$.

Решение:

$\overline{abc5} = (10m + n) \cdot 11$ ($1 \leq m \leq 9$). Из условия задачи следует, что $n = 5$; $\overline{abc5} = 110m + 55 = 100m + (10m + 50) + 5$. Чтобы число $100m + 10m + 50 + 5$ было четырехзначным, $m > 8$, т.е. $m = 9$. Тогда имеем $\overline{abc5} = 95 \cdot 11 = 1045$.

Ответ: $\overline{abc5} = 1045$, $\overline{mn} = 95$.

Задача №10. Из полного кувшина, вмещающего 300 грамм концентрированного сока, отлили третью часть и столько же долили воды. Затем из кувшина отлили четвертую часть разведенного сока и снова долили воды. После этого отлили еще третью часть, но водой не доливали. Сколько оказалось в кувшине сока и воды?

Решение: Обозначим через 1 — объем кувшина с соком в первоначальном состоя-

нии. Тогда после первого переливания в кувшине будет $\frac{2}{3}$ сока и $\frac{1}{3}$ воды. Далее, после второго переливания отлили $\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{6}$ сока, значит его осталось $\frac{2}{3} - \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$. Когда отлили еще третью часть, то количество отлитого сока $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$, значит осталось $\frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$ чистого сока, а весь оставшийся объем равен $\frac{2}{3}$. Учитывая, что в этом объеме $\frac{1}{3}$ чистого сока, то воды будет $\frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$. Таким образом, после третьего отливания будет воды и сока по 100 грамм.

Ответ: Сока — 100 грамм, воды — 100 грамм.