САММАТ-2023
Решение задач 10 класса

Задача №1. Найдите квадратный трехчлен $P(x)$, у которого один из корней совпадает с корнем многочлена $Q(x) = P(x) - 6x + 12$, а второй корень в три раза меньше наибольшего из корней многочлена $Q(x)$ и $Q(3) = -3$.

Решение: Пусть искомый многочлен в общем виде задан следующим образом:

$$P(x) = ax^2 + bx + c.$$

Тогда многочлен $Q(x) = ax^2 + (b-6)x + (c+12)$

Пусть общий корень $P(x)$ и $Q(x)$ обозначен x_0. Тогда $P(x_0) = 0$ и $Q(x_0) = 0$. Из равенства $Q(x_0) = P(x_0) - 6x_0 + 12$ получаем $x_0 = 2$. Заметим, что $Q(3) = P(3) - 18 + 12 = P(3) - 6 = -3$, значит $P(3) = 3$.

Составим систему из двух равенств, подставив 2 и 3 в функцию $P(x)$:

$$\begin{cases} 4a + 2b + c = 0 \\ 9a + 3b + c = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4a + 2b + c = 0 \\ 5a + b = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = 6a - 6 \\ b = 3 - 5a \end{cases}$$

Тогда $P(x) = ax^2 + (3-5a)x + (6a-6)$, $Q(x) = ax^2 - (5a+3)x + (6a+6)$.

Решаем уравнение $Q(x) = 0$ и получаем два корня: $\begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = \frac{3(a+1)}{a} \end{cases}$

1) Пусть $x_1^0 = 2$ — наибольший корень $Q(x) = 0$. Тогда по теореме Виета для $P(x) = 0$ имеем $x_1 + x_2 = \dfrac{3-5a}{a} \Rightarrow |x_1 = x_1^0|\ 2 + x_2 = \dfrac{3-5a}{a} \Rightarrow x_2 = \dfrac{3(a-1)}{a}$. Но $\dfrac{3(a-1)}{a} = \dfrac{2}{3} \Rightarrow 9a - 9 = 2a \Rightarrow a = \dfrac{9}{7}$. Тогда $x_2^0 = \dfrac{5a+3}{a} - 2 = \dfrac{3(a+1)}{a}$ и при $a = \dfrac{9}{7}$ $x_2^0 = \dfrac{3(\frac{9}{7}+1)}{\frac{9}{7}} = \dfrac{3(9+7)}{9} \cong 5{,}33$ и $x_1^0 = 2$ не наибольший корень.

2) Пусть $x_2^0 = \dfrac{5a+3}{a} - 2 = \dfrac{3(a+1)}{a}$ наибольший корень. Тогда $x_2 = \dfrac{3(a-1)}{a} = \dfrac{1}{3} \cdot 3\left(\dfrac{a+1}{a}\right) \Rightarrow 3a - 3 = a + 1 \Rightarrow a = 2$ и $P(x) = ax^2 + (3-5a)x + (6a-6)$ при $a = 2$ имеет вид $P(x) = 2x^2 - 7x + 6$.

Ответ: $P(x) = 2x^2 - 7x + 6$.

Задача №2. $\begin{cases} x_1(x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_{2023}) = 1, \\ x_2(x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_{2023}) = 3, \\ x_3(x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_{2023}) = 5, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{2023}(x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_{2023}) = 4045. \end{cases}$

Решение: Сложив все уравнения почленно и вынеся за скобки в левой части общий множитель $x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_{2023}$, получим

$$(x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_{2023})^2 = 1 + 3 + 5 + \ldots 4045 = 2023^2$$

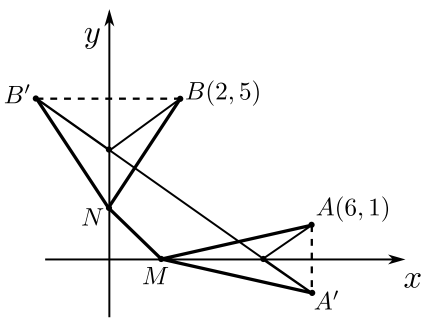
(для арифметической прогрессии имеем $S = \dfrac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$, $a_1 = 1$, $d = 2$, $a_n = a_1 + d(n-1)$ $\Rightarrow 4045 = 1 + 2(n-1) \Rightarrow n = 2023$, тогда $S = \dfrac{1+4045}{2} \cdot 2023 = 2023^2$). Отсюда $x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_{2023} = 2023$ или $x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_{2023} = -2023$.

В первом случае имеем из первого уравнения системы $x_1 = \dfrac{1}{2023}$, из остальных уравнений $x_2 = \dfrac{3}{2023}, x_3 = \dfrac{5}{2023}, \ldots, x_{2023} = \dfrac{4045}{2023}$.

Во втором случае $x_1 = -\dfrac{1}{2023}, x_2 = -\dfrac{3}{2023}, x_3 = -\dfrac{5}{2023}, \ldots, x_{2023} = -\dfrac{4045}{2023}$.

Ответ: $x_1 = \dfrac{1}{2023}, x_2 = \dfrac{3}{2023}, x_3 = \dfrac{5}{2023}, \ldots, x_{2023} = \dfrac{4045}{2023}$;
$x_1 = -\dfrac{1}{2023}, x_2 = -\dfrac{3}{2023}, x_3 = -\dfrac{5}{2023}, \ldots, x_{2023} = -\dfrac{4045}{2023}$

Задача №3. На плоскости Oxy заданы две точки: $A(6,1)$ и $B(2,5)$. Найти наименьшую длину ломаной $AMNB$, если точка M лежит на оси Ox, а точка N — на оси Oy.



Решение: Пусть $AMNB$ — одна из таких ломаных. Отразим точки A и B симметрично относительно координатных осей Ox и Oy (соответственно). Очевидно, что $MA = MA'$ и $NB = NB'$. Поэтому

$$L_{AMNB} = AM + MN + NB = A'M + MN + NB'.$$

Поскольку кратчайшим расстоянием между точками A' и B' является отрезок прямой, то

$$L_{\min} = A'B' = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10.$$

Ответ: $L_{\min} = 10$.

Задача №4. Сколько существует различных восьмизначных чисел, делящихся на 11, в десятичной записи которых ровно по одному разу встречаются цифры $\{4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, а оставшиеся две цифры — нули?

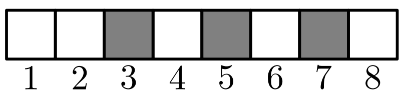
Решение: Если S_1 — сумма цифр, стоящих на нечетных местах, а S_0 — сумма цифр, на четных местах, то согласно признаку делимости на 11 число $S_0 - S_1$ должно делиться на 11.

$$S_0 + S_1 = 0 + 0 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 39.$$

Очевидно, что $S_0 \neq S_1$, а поэтому $S_0 - S_1 = \pm 11$. Возможны два случая, а в каждом из них два подслучая:

1. $S_0 = 25$, $S_1 = 14$

   (a) $S_1 = 5 + 9 + 0 + 0$; $S_2 = 4 + 6 + 7 + 8$



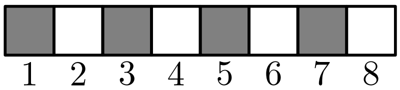
На два из отмеченных 3-х нечетных мест ставим нули (C_3^2 способа), на оставшиеся два нечетных места — цифры 5 и 9 (2 способа). На все четные места ставим цифры 4, 6, 7, 8 (4! способов).

Всего способов: $C_3^2 \cdot 2 \cdot 4! = 144$.

(b) $S_1 = 6 + 8 + 0 + 0$; $S_2 = 4 + 5 + 7 + 9$.

Аналогично, 144 способа.

2. $S_1 = 25$, $S_0 = 14$ (и снова два подслучая)



Всего способов: $2 \cdot 4! \cdot C_4^2 \cdot 2! = 576$.

Итого: $2 \cdot 144 + 576 = 864$.
Ответ: 864 способа.

Задача №5. Решить систему уравнений $\begin{cases} \cos^3 x = \sin y; \\ \sin^3 x = \cos y. \end{cases}$

Решение: Возведем каждое уравнение в квадрат и затем сложим найденные уравнения, получим

$$\cos^6 x + \sin^6 x = \sin^2 x + \cos^2 x, \quad \Rightarrow \quad \cos^6 x + \sin^6 x = 1, \quad \Rightarrow$$
$$(\sin^2 x + \cos^2 x)(\cos^4 x - \cos^2 x \sin^2 x + \sin^4 x) = 1, \quad \Rightarrow$$
$$\cos^4 x - \cos^2 x \sin^2 x + \sin^4 x) = 1, \quad \Rightarrow$$
$$\cos^4 x - \cos^2 x \sin^2 x + \sin^4 x) = (\cos^2 x + \sin^2 x)^2, \quad \Rightarrow$$
$$\cos^4 x - \cos^2 x \sin^2 x + \sin^4 x) = \cos^4 x + 2\cos^2 x \sin^2 x + \sin^4 x, \quad \Rightarrow$$
$$-3\cos^2 x \sin^2 x = 0, \quad \Rightarrow \quad \cos^2 x \sin^2 x = 0, \quad \Rightarrow \quad x = \frac{\pi n}{2}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Рассмотрим четыре случая.

1) Если $x = 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, то $\begin{cases} \sin y = 1, \\ \cos y = 0, \end{cases}$ поэтому $y = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$.

2) Если $x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, то $\begin{cases} \sin y = 0, \\ \cos y = 1, \end{cases}$ поэтому $y = 2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$.

3) Если $x = \pi + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, то $\begin{cases} \sin y = -1, \\ \cos y = 0, \end{cases}$ поэтому $y = \dfrac{3\pi}{2} + 2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$.

4) Если $x = \dfrac{3\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, то $\begin{cases} \sin y = 0, \\ \cos y = -1, \end{cases}$ поэтому $y = \pi + 2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$.

Ответ: 1) $x = 2\pi n$, $y = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi m$, $n, m \in \mathbb{Z}$; 2) $x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n$, $y = 2\pi m$, $n, m \in \mathbb{Z}$; 3) $x = \pi + 2\pi n$, $y = \dfrac{3\pi}{2} + 2\pi m$, $n, m \in \mathbb{Z}$; 4) $x = \dfrac{3\pi}{2} + 2\pi n$, $y = \pi + 2\pi m$, $n, m \in \mathbb{Z}$.

Задача №6. Найти решение уравнения в целых числах:

$$10-\sqrt{x^2+y^2-2x+1}-\sqrt{x^2+y^2-18x+81}=0.$$

Решение: Избавляемся от иррациональности

$$x^2+y^2-2x+1=100-20\sqrt{x^2+y^2-18x+81}+x^2+y^2-18x+81 \ \Rightarrow$$
$$180-16x=20\sqrt{x^2+y^2-18x+81} \ \Rightarrow \ 45-4x=5\sqrt{x^2+y^2-18x+81} \ \Rightarrow$$
$$16x^2-360x+2025=25x^2+25y^2-450x+2025 \ \Rightarrow$$
$$9(x-5)^2+25y^2=225 \ \Rightarrow \ \frac{(x-5)^2}{5^2}+\frac{y^2}{3^2}=1 \ \Rightarrow$$
$$\begin{array}{l}|x-5|\le 5;\\ |y|\le 3\end{array} \ \Rightarrow \ \begin{array}{l}0\le x\le 10;\\ -3\le y\le 3\end{array} \ \Rightarrow \ |x-5|=\pm 5\sqrt{1-\frac{y^2}{3^2}}.$$

Перебором устанавливаем, что целые решения получаем при $\begin{cases}x=5,\\ y=-3;\end{cases}$ $\begin{cases}x=10,\\ y=0;\end{cases}$ $\begin{cases}x=0,\\ y=10;\end{cases}$ $\begin{cases}x=5,\\ y=3;\end{cases}$

Ответ: $(5,-3)$, $(10,0)$, $(0,0)$, $(5,3)$.

Задача №7. Числа $\frac{5}{2}$, $-\frac{11}{2}$, $\frac{121}{10}$ являются членами некоторой арифметической прогрессии. Найти разность прогрессии, если известно, что первое из указанных чисел является ее шестым членом.

Решение: Случай 1. Пусть прогрессия является возрастающей. Расположим элементы, заданные в условии, буквами с номерами:

$$a_m=-\frac{11}{2},\ a_6=\frac{5}{2},\ a_n=\frac{121}{10}.$$

Так как элементы прогрессии нумеруются с 1, то m принимает значения от 1 до 5. Тогда разность прогрессии равна соответственно

Номер (m)	Разность (d)	n
1	1,6	12
2	2	
3	8/3	
4	4	
5	8	

В зависимости от m формула для члена имеет вид: $a_6=a_m+d(6-m) \Rightarrow$ $d=\dfrac{a_6-a_m}{6-m}=\dfrac{\frac{5}{2}+\frac{11}{2}}{6-m}=\dfrac{8}{6-m}$. В таблице приведены все возможные значения d.

Известно, что $a_n=a_6+d(n-6)$ $(n\ge 7)$. Учитывая, что $a_n=\dfrac{121}{10}$, $a_6=\dfrac{5}{2}$ имеем

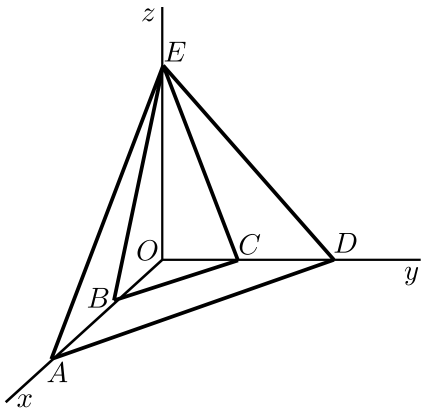
$$n=\frac{a_n-a_6}{d}+6=\frac{96}{10d}+6=\frac{48}{5d}+6.$$

Подставляя в это равенство полученные значения d, найдем натуральное n. Это возможно только при $d = 1{,}6$ ($n = 12$). Ответ: 1,6 — для возрастающей прогрессии.

Случай 2. Пусть прогрессия убывающая. Тогда $a_m = \dfrac{121}{10}$, $a_6 = \dfrac{5}{2}$, $a_n = -\dfrac{11}{2}$. Аналогичные рассуждения приводят к следующим значениям разности: $d = -1{,}92$ ($m = 1$); $d = -2{,}4$ ($m = 2$); $d = -3{,}2$ ($m = 3$); $d = -4{,}8$ ($m = 4$); $d = -9{,}6$ ($m = 5$). Тогда ни при каком d соотношение $n = \dfrac{a_n - a_6}{d} + 6 = \dfrac{-8}{d} + 6$ ($n \geq 7$) не дает натуральное значение. Прогрессия не может быть убывающей.

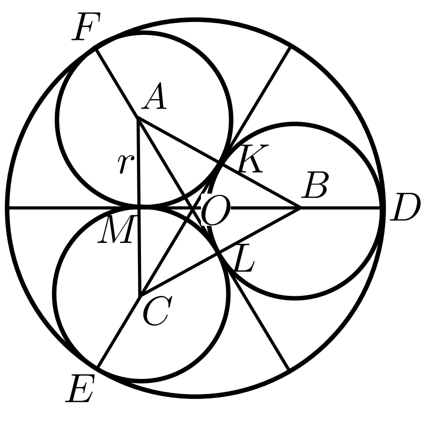
Ответ: 2.

Задача №8. Существует ли четырехугольная пирамида, две противоположные боковые грани которой перпендикулярны плоскости основания пирамиды? Ответ обосновать.



Решение: Существует. Пример приведен на рисунке. У пирамиды $ADCBE$ грани ABE и CDE перпендикулярны плоскости основания.

Задача №9. Три равных окружности радиуса r расположены внутри окружности радиуса R, попарно касаются между собой и внешней окружности. Зная величину отрезка r, при помощи циркуля и линейки (без единицы измерения) построить отрезок R.

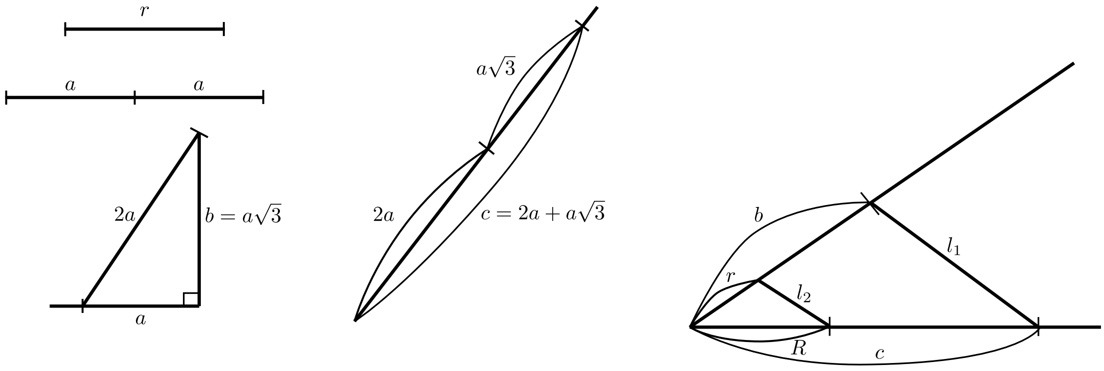


Решение: Построим окружность радиуса R с центром O. Изобразим три равные окружности, касающиеся друг друга и первой окружности. Пусть A, B и C — центры равных окружностей, D, E, F — точки их касания с данной окружностью, K, L, M — точки их касания друг с другом. Радиусы равных окружностей обозначим r. $\triangle ABC$ равносторонний. Точки M, O, B, D лежат на одной прямой, так как каждая из них равноудалена от точек A и C. Аналогично точки K, O, C, E лежат на одной прямой. Точки F, A, O, L лежат на одной прямой.

Рассмотрим, например, треугольник AOM. В нем $AM = r$, $AO = OF - AF = R - r$, $\angle OAM = 30°$, $\angle AMO$ прямой. Получаем $AM = AO\cos 30°$, т.е. $r = (R - r)\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Отсюда $2r = R\sqrt{3} - r\sqrt{3}$, $r = \dfrac{R\sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}}$ или $R = \dfrac{r(2 + \sqrt{3})}{\sqrt{3}}$.

Построение отрезка R приведено на рисунке по схеме: а)–в). На рисунке в) прямые l_1 и l_2 параллельны. Решение основано на построении прямоугольного треугольника с известным катетом a и гипотенузой $2a$, построении отрезка $c = 2a + a\sqrt{3}$ и подобия треугольников (рис. в)):

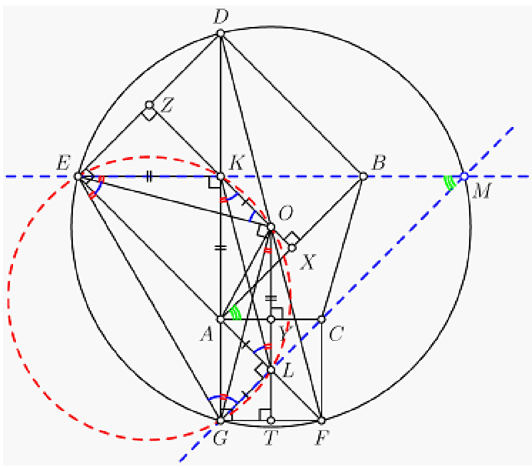
$$\frac{R}{r} = \frac{2a + a\sqrt{3}}{a\sqrt{3}} = \frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \;\Rightarrow\; R = r\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}.$$



а) б) в)

Задача №10. Дан треугольник $\triangle ABC$ с острым углом $\angle A$ такой, что $AB \neq AC$. На сторонах AB и AC вне треугольника построены квадраты $ABDE$ и $ACFG$ с центрами K и L. Оказалось, что точки D, E, F и G лежат на одной окружности ω с центром O. Найти угол $\angle A$ треугольника $\triangle ABC$.

Решение: Обозначим длины сторон треугольника $AB = a$ и $AC = b$. Пусть точка O — центр окружности ω, на которой лежат вершины квадратов D, E, G и F.



Точка O равноудалена от вершин D и E квадрата $ABDE$, поэтому она лежит на серединном перпендикуляре к отрезку ED, а, значит, и к отрезку AB, поэтому она также равноудалена вершин A и B треугольника $\triangle ABC$. Аналогично точка O равноудалена от вершин F и G квадрата $ACFG$, поэтому она лежит на серединном перпендикуляре к отрезку FG, а, значит, и к отрезку AC, поэтому она также равноудалена вершин A и C треугольника $\triangle ABC$. Следовательно, точка O также является центром описанной окружности треугольника $\triangle ABC$.

Обозначим через K и L центры квадратов $ABDE$ и $ACFG$, а через X, Y, Z и T — середины отрезков AB, AC, DE и FG соответственно. Пусть длины сторон треугольника $\triangle ABC$ равны $AB = a$ и $AC = b$, тогда $AX = KX = KZ = ZE = \dfrac{a}{2}$ и $AY = YL = LT = TG = \dfrac{b}{2}$. Пусть ориентированная длина отрезка XO равна x, причём $x > 0$, если точка O лежит вне квадрата $ABDE$ и $x < 0$, если точка O лежит внутри квадрата $ABDE$. Аналогично пусть ориентированная длина отрезка YO равна y, причём $y > 0$, если точка O лежит вне квадрата $ACFG$ и $y < 0$, если точка O лежит внутри квадрата $ACFG$. Тогда $OK = x + \dfrac{a}{2}$ и $OL = y + \dfrac{b}{2}$, а также $OZ = x + a$ и $OT = y + b$.

Из прямоугольных треугольников $\triangle EZO$, $\triangle GTO$, $\triangle AXO$ и $\triangle AYO$ по теореме Пифагора получаем равенства

$$OZ^2 + ZE^2 = OE^2 = OG^2 = OT^2 + TG^2, \quad OX^2 + XA^2 = OA^2 = OY^2 + YA^2,$$

то есть

$$(x+a)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = (y+b)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2, \quad x^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = y^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2, \Rightarrow$$

$$x^2 + 2ax + a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = y^2 + 2by + b^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2, \quad x^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = y^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2, \Rightarrow$$

$$2ax + a^2 = 2by + b^2, \Rightarrow a(2x+a) = b(2y+b), \Rightarrow \frac{2x+a}{b} = \frac{2y+b}{a}, \Rightarrow$$

$$\frac{x + \frac{a}{2}}{\frac{b\sqrt{2}}{2}} = \frac{y + \frac{b}{2}}{\frac{a\sqrt{2}}{2}}, \Rightarrow \frac{OK}{AL} = \frac{OL}{AK}.$$

Так как $\angle AKO = \angle ALO = 45^\circ$, тогда треугольники $\triangle AKO$ и $\triangle ALO$ подобны, поэтому $\dfrac{OK}{AL} = \dfrac{OL}{AK} = \dfrac{AO}{AO} = 1$, то есть треугольники $\triangle AKO$ и $\triangle ALO$ не подобны, а равны. Следовательно, $OK = AL = GL$ и $OL = AK = EK$, поэтому четырёхугольник $AKOL$ — параллелограмм, откуда $AL||OK||AE$ и $AK||OL||AG$. Это означает, что точки G, A, K, D лежат на одной прямой, а также точки E, A, L, F лежат на одной прямой. Поэтому $AD \perp AC$ и, значит, $\angle BAC = \angle DAC - \angle DAB = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$.

Ответ: $\angle BAC = 45^\circ$.