САММАТ-2023
Решение задач 8 класса

Задача №1. Рассмотрим три самых маленьких простых числа: 2, 3 и 5. Сколько существует различных трехзначных чисел, которые делятся без остатка на любые два из этих простых чисел и не делятся на третье?

Решение: Обозначим через n_6, n_{10}, n_{15} и n_{30} количества трехзначных чисел, делящихся без остатка на 6, 10, 15 и 30 (соответственно).

$\{102 = 6 \cdot 17; 108 = 6 \cdot 18; \ldots ; 996 = 6 \cdot 166\}$. Значит, $n_6 = 166 - 16 = 150$.

$\{100 = 10 \cdot 10; 110 = 10 \cdot 11; \ldots ; 990 = 10 \cdot 99\}$. Значит, $n_{10} = 99 - 9 = 90$.

$\{105 = 15 \cdot 7; \ldots ; 990 = 15 \cdot 66\}$. Значит, $n_{15} = 66 - 6 = 60$.

$\{120 = 30 \cdot 4; \ldots ; 990 = 30 \cdot 33\}$. Значит, $n_{30} = 33 - 3 = 30$.

Очевидно, что общее количество всех трехзначных чисел, удовлетворяющих условия задачи, будет равно

$$(n_6 - n_{30}) + (n_{10} - n_{30}) + (n_{15} - n_{30}) = 150 + 90 + 60 - 3 \cdot 30 = 210.$$

Ответ: 210 чисел.

Задача №2. Установить, какое из чисел больше: $2023^{2023} + 2021^{2021}$ или $2023^{2021} + 2021^{2023}$.

Решение: Составим разность этих выражений:

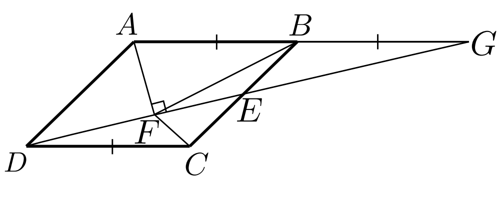
$$\begin{gathered} 2023^{2023} + 2021^{2021} - (2023^{2021} + 2021^{2023}) = \\ = (2023^{2023} - 2023^{2021}) - (2021^{2023} - 2021^{2021}) = \\ = 2023^{2021}(2023^2 - 1) - 2021^{2021}(2021^2 - 1) > 0. \end{gathered}$$

Поскольку $2023^{2021} > 2021^{2021} > 0$, $2023^2 - 1 > 2021^2 - 1 > 0$, поэтому

$$2023^{2023} + 2021^{2021} > 2023^{2021} + 2021^{2023}.$$

Ответ: $2023^{2023} + 2021^{2021}$ больше $2023^{2021} + 2021^{2023}$.

Задача №3. В ромбе $ABCD$ величина угла B равна $40°$, E — середина BC, F — основание перпендикуляра, опущенного из A на DE. Найдите величину угла DFC.



Решение: Пусть прямые DE и AB пересекаются в точке G. Медиана прямоугольного треугольника, проведенная к гипотенузе, равна половине гипотенузы. Применяя это утверждение к треугольнику AFG, получим $BF = BA = BG$.

Треугольники CBF и FBA равнобедренные, поэтому сумма углов BCF и BAF равна углу CFA.

Сумма углов четырехугольника $ABCF$ равна $360°$. Поэтому $\angle CFA + \angle CFA + 40° = 360°$, откуда $\angle CFA = 160°$. Следовательно, $\angle CFD = 360° - \angle AFC - \angle AFD = 360° - 160° - 90° = 110°$.

Задачу можно решить, используя окружность.

Ответ: $110°$.

Задача №4. Решить систему уравнений $\begin{cases} x+y+az=2 \\ x+ay+z=-1 \\ ax+y+z=-1 \end{cases}$

Решение: Сложим все три уравнения

$$2(x+y+z)+a(x++z)=0 \Rightarrow (x+y+z)(2+a)=0 \Rightarrow x+y+z=0 \text{ или } a=-2.$$

Т.е. при $a=-2$ система имеет бесконечное множество решений. Поэтому $a \neq -2$.

Далее: $x+y+z=0 \Rightarrow x+y=-z$ и из первого уравнения имеем $-z+az=2 \Rightarrow z=\dfrac{2}{a-1}$ $(a \neq 1)$.

$x+z=-y$ и из второго уравнения имеем $-y+ay=-1 \Rightarrow y=\dfrac{1}{1-a}$ $(a \neq 1)$.

Далее $y+z=-x \Rightarrow ax-x=-1 \Rightarrow x=\dfrac{1}{1-a}$ $(a \neq 1)$.

Ответ:

$$x=\frac{1}{1-a}, \quad y=\frac{1}{1-a}, \quad z=\frac{2}{a-1} \quad (a \neq 1, a \neq -2) \tag{1}$$

при $a=-2$ имеем бесконечное множество решений, одно из которых можно получить из полученного решения (1) при $a=-2$.

Задача №5. Существует ли натуральное n, такое что n^2+n+1 делится на 1001?

Решение: Для того, чтобы число n^2+n+1 делилось на 1001, оно должно делиться на 7, 11, 13. Изучим остатки от деления числа n^2+n+1 на 11.

n	n^2	n^2+n+1
0	0	1
1	1	3
2	4	7
3	9	13
4	16	21
5	25	31
6	36	43
7	49	57
8	64	73
9	81	91
10	100	111

Ни в одном случае число в последнем столбце не делится на 11, значит n^2+n+1 не может делиться на 11, а значит и на 1001, поскольку остатки от деления чисел n^2+n+1 для $n>10$ будут повторяться с остатками от деления этого числа на 11 при $0 \leq n \leq 10$.

Ответ: не существует.

Задача №6. Среди чисел от 1 до 500 выбрали 430. Докажите, что произведение каких-то двух делится на 35.

Решение: Для того, чтобы произведение каких-то двух выбранных чисел делилось на 35 необходимо и достаточно, чтобы либо какое-то число само делилось на 35, либо одно из выбранных чисел делилось на 5, а другое на 7.

От противного, пусть удалось выбрать 430 чисел, среди которых нет пары, в произведении делящейся на 35.

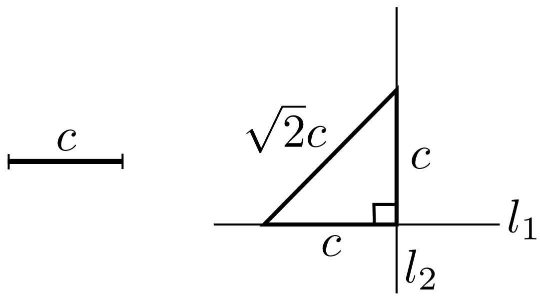
1. Значит нет чисел, делящихся на 35. Таких чисел в нашем наборе $500/35 \to 14$ шт.

2. Заметим, что если есть число, делящееся на 5, то не должно быть числа, делящегося на 7, и наоборот, если есть число, делящееся на 7, то не должно быть числа, делящегося на 5. Заметим также, что чисел, делящихся на 7, меньше, чем делящихся на 5, значит стоит посчитать именно их (делящихся на 7). $500/7 \to 71$. Чисел, не делящихся на 7 в нашем наборе $500 - 71 = 429$, значит по крайней мере одно число из выбранных 430 будет делиться на 7, тогда наше предположение неверно. Аналогично с 5, что формально не обязательно.

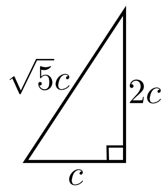
Задача №7. Задан отрезок a. С помощью циркуля и линейки (без масштаба измерения) построить отрезок $b = a \cdot \dfrac{3+\sqrt{5}}{1+\sqrt{2}}$. Все этапы построения подробно описать.

Решение: Схема решения.

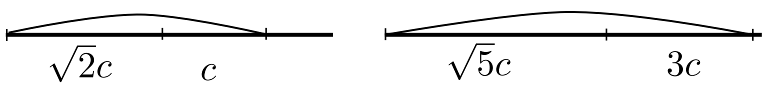
1 этап. Берем произвольный отрезок c. Строим две взаимно перпендикулярные прямые и на них откладываем отрезки c:



2 этап. Строим прямоугольный треугольник со сторонами c и $2c$:

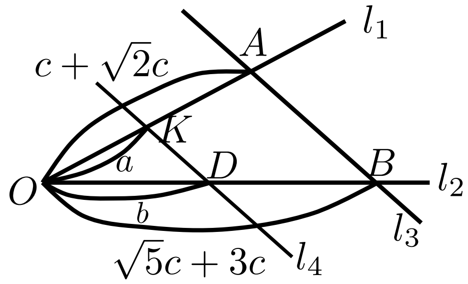


3 этап. Откладываем отрезки $c + c\sqrt{c}$ и $3c + \sqrt{5}c$:



4 этап. Проводим два луча l_1 и l_2, образующие острый угол. Откладываем на них отрезки $c+c\sqrt{c}$ и $3c+\sqrt{5}c$, а на луче l_1 — отрезок a. Через точку K проведем прямую, параллельную AB, т.е. $l_4||l_3$. Тогда $b = |OD|$. Это следует из подобия треугольников OAB и OKD:

$$\frac{b}{a} = \frac{\sqrt{5}c + 3c}{c + \sqrt{2}c} \ \Rightarrow \ b = a \cdot \frac{\sqrt{5}+3}{1+\sqrt{2}}.$$



Задача №8. Решить уравнение

$$4\sqrt{x-3}-\frac{1}{16}x^2=3.$$

Решение: Область допустимых значений: $x\in[3;+\infty)$.

$$4\sqrt{x-3}=\frac{1}{16}x^2+3$$

Обозначим $y=\dfrac{1}{16}x^2+3$

$$4\sqrt{x-3}=y,$$
$$16(x-3)=y^2,$$
$$x=\frac{1}{16}y^2+3$$
$$\begin{cases} x=\frac{1}{16}y^2+3,\\ y=\frac{1}{16}x^2+3.\end{cases}$$

Вычтем из первого уравнения второе

$$x-y=\frac{1}{16}(y^2-x^2),$$
$$x-y-\frac{1}{16}(y-x)(y+x)=0,$$
$$(x-y)\left(1+\frac{1}{16}(y+x)\right)=0,$$
$$x=y \text{ или } x+y=-16$$

1) $x=y\Rightarrow\dfrac{1}{16}x^2+3=x\Rightarrow\dfrac{1}{16}x^2-x+3=0\Rightarrow x_1=4,x_2=12.$

2) $y=-16-x\Rightarrow\dfrac{1}{16}x^2+3=-16-x$ — нет действительных корней.

Ответ: $x_1=4,x_2=12$.

Задача №9. Найти нечетное трехзначное число, если известно, что сумма квадратов чисел сотен и единиц не превосходит удвоенного числа сотен, а квадрат числа десятков превосходит квадрат суммы чисел сотен и единиц более чем на 60.

Решение: Обозначим цифры числа a, b, c. Искомое число можем записать в виде abc, где $a \neq 0$. $abc = 100a + 10b + c$. Из условия задачи получаем:

$$\begin{cases} c \in \{1; 3; 5; 7; 9\} \\ a^2 + c^2 \leq 2a \\ (a+c)^2 + 60 < b^2 \end{cases}$$

Неравенство $a^2 + c^2 \leq 2a$ эквивалентно неравенству $a^2 - 2a + 1 \leq 1 - c^2$ или $(a-1)^2 \leq 1 - c^2$. Данное неравенство возможно лишь при $1 - c^2 \geq 0$, т.е. при $c = 1$. Получаем $(a-1)^2 \leq 0$ или $a = 1$. Из последнего неравенства получаем $64 \leq b^2$, т.о. $b = 9$.

Ответ: 191.

Задача №10. Дано уравнение $x^2 + ax + 6 = 0$, x_1, x_2 — его корни, причем $x_1^2 + x_2^2 = 13$. Найти $x_1 + x_2$.

Решение: $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2$

$$x_1x_2 = 6$$
$$(x_1 + x_2)^2 - 12 = 13$$
$$(x_1 + x_2)^2 = 25$$

$x_1 + x_2 = 5$ при $a = -5$.

$x_1 + x_2 = -5$ при $a = 5$.

Ответ: сумма корней уравнения равна 5 при $a = -5$ и -5 при $a = 5$.