САММАТ-2023
Решение задач 9 класса

Задача №1. Пусть $a, b \in \mathbb{N}$, оказалось, что $a^2 + b^2 = (a+b)q + r$ и $r < (a+b)$, $k, r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Найти максимальную сумму $a+b$, если $q^2 + r + 10 = 2023$.

Решение: Оценим q: $q^2 + r = 2013$. Значит q^2 меньше 2013. Значит $q < 45$.

1. $q = 44$, $r = 76$

$$a^2 + b^2 = 44(a+b) + 76$$
$$(a-22)^2 + (b-22)^2 = 1044$$

Квадраты целых чисел оканчиваются только на 0, 1, 4, 5, 6, 9, значит 1044 можно получить как сумму двух чисел, оканчивающихся на 0 и 4 или 5 и 9. Значит один из квадратов точно делится на 5, а значит осталось перебрать варианты чисел: 0, 5, 10, 15, 20, 25, 30. Проанализируем выражение $(a-22)^2 + (b-22)^2 = 1044$ с учетом того, что одно из слагаемых равно 0, 5, 10, 15, 20, 25, 30 (в силу симметрии a и b, входящих в выражение, безразлично какое из двух). Придавая $a - 22$ перечисленные значения, получим, что лишь при $a = 52$ $(a - 22 = 30)$, величина b — натуральное значение, в остальных случаях $b \notin \mathbb{N}$. Значит, искомые наборы $a = 52$, $b = 34$ и $a = 34$, $b = 52$. Сумма равна 86.

2. $q \leq 43$, $r \geq 164$. Имеем

$$a^2 + b^2 = (a+b)q + r$$
$$2(a^2 + b^2) \geq (a+b)^2$$

Значит $\dfrac{(a+b)^2}{2} \leq (a+b)q + r$, тогда

$$r < (a+b) \leq 2q + \frac{2r}{a+b} < 2q + 2 \leq 88.$$

Значит, таких r не существует.

Ответ: 86.

Задача №2. Решить уравнение в целых числах

$$\sqrt{xy^2 - 2022} + 1 = \frac{2023}{xy^2 + 1}.$$

Решение: Обозначим $t = xy^2 + 1$, тогда уравнение примет вид

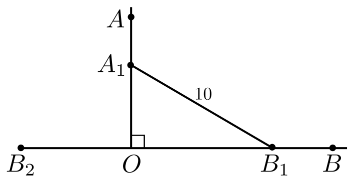
$$\sqrt{t - 2023} - \frac{2023}{t} + 1 = 0, \Rightarrow \sqrt{t - 2023} + 1 = \frac{2023}{t},$$

где $t \geq 2023$. Нетрудно видеть, что в левой части последнего уравнения стоит монотонно возрастающая функция, а в правой части уравнения стоит монотонно убывающая функция. Тогда единственным корнем уравнения является $t = 2023$.

Следовательно, уравнение равносильно уравнению $xy^2 = 2022$. Так как справедливо равенство $2022 = 2 \cdot 3 \cdot 337$, то уравнение имеет два решения: а) $x = 2022$, $y = 1$; б) $x = 2022$, $y = -1$.

Ответ: $(2022; 1)$; $(2022; -1)$.

Задача №3. По двум взаимно перпендикулярным дорогам движутся в направлении перекрестка велосипедист и пешеход. В некоторый момент времени велосипедист находится на расстоянии 32 км, а пешеход — на расстоянии 14 км от перекрестка. Через какое время после этого расстояние между ними будет равно 10 км и на каком расстоянии будут находиться велосипедист и пешеход от перекрестка, если скорость пешехода 4 км/час, а велосипедиста 12 км/час?



Решение: $V_1 = 4$ км/час, $V_2 = 12$ км/час.

$AA_1 = V_1 t$, $BB_1 = V_2 t$, $OA_1 = 14 - 4t$, $OB_1 = 32 - 12t$.

$$(14-4t)^2 + (32-12t)^2 = 100 \Rightarrow 160t^2 - 880t + 1220 = 100$$

$$\Rightarrow 2t^2 - 11t + 14 = 0 \Rightarrow t_{1,2} = \frac{11 \pm \sqrt{121-112}}{4} = \frac{11 \pm 3}{4}$$

$\Rightarrow t_1 = 2$ часа, $t_2 = 3{,}5$ часа.

Оба ответа подходят: при $t = 2$ часа пешеход будет в точке A_1 на расстоянии 6 км, а велосипедист в точке B_1 на расстоянии 8 км. При $t = 3{,}5$ часа пешеход пройдет 14 км, т.е. будет на перекрестке, а велосипедист на расстоянии 10 км от перекрестка с другой ее стороны.

Задача №4. Найти наименьшее положительное решение неравенства

$$[x]^2 - x \cdot [x] + 3 \le 0.$$

Решение: $[x]$ — целая часть числа x, то есть наибольшее целое число, не превосходящее x.

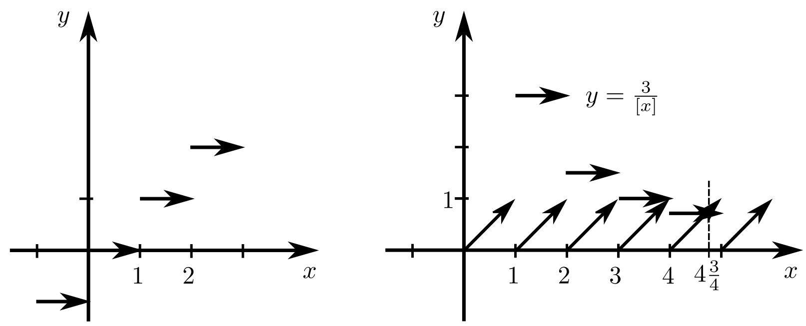
$\{x\} = x - [x]$ — дробная часть числа x.

Данное неравенство можно записать в виде

$$[x] \cdot \{x\} \ge 3, \quad \text{т.е. } \{x\} \ge \frac{3}{[x]}.$$

Очевидно, что $[x] \ne 0$, поэтому $x \ge 1$.

Построим графики функций $y = [x]$, $y = \{x\}$ и $y = \dfrac{3}{[x]}$.



$y = [x]$ $\qquad$ $y = \{x\}$

Ответ: $x_{\min} = 4{,}75$.

Задача №5. Найти наименьшее значение выражения

$$\sqrt{(x-2)^2+(y+2)^2}+\sqrt{(x+1)^2+(y-2)^2},$$

где x, y — произвольные вещественные числа.

Решение: Пусть $M(x;y)$, $A(2;-2)$, $B(-1;2)$ — точки двумерной координатной плоскости, тогда выражение f равно сумме расстояния между точками M, A и расстояния между точками M, B, то есть

$$f=\sqrt{(x-2)^2+(y+2)^2}+\sqrt{(x+1)^2+(y-2)^2}=|MA|+|MB|.$$

Если точки M, A, B не лежат на одной прямой, то по неравенству треугольника имеем

$$f=|MA|+|MB|>|AB|=\sqrt{(2-(-1))^2+(-2-2)^2}=\sqrt{3^2+(-4)^2}=5.$$

Если точки M, A, B лежат на одной прямой и точка M не лежит на отрезке AB, то один из отрезков MA и MB содержит отрезок AB, поэтому также справедливо неравенство

$$f=|MA|+|MB|>|AB|=5.$$

Наконец, если точки M, A, B лежат на одной прямой и точка M лежит на отрезке AB, тогда справедливо равенство

$$f=|MA|+|MB|=|AB|=5.$$

Следовательно, наименьшее значение выражения f равно $\min\limits_{x,y\in\mathbb{R}} f=|AB|=5$.

Ответ: 5.

Задача №6. Установить, какое из чисел больше $\dfrac{2023^{2023}+2020^{2020}}{2023^{2020}+2020^{2023}}$ или 1.

Решение: Найдем разность числителя и знаменателя дроби:

$$\begin{gathered}2023^{2023}+2020^{2020}-(2023^{2020}+2020^{2023})=\\=2023^{2023}-2023^{2020}-(2020^{2023}-2020^{2020})=\\=2023^{2020}(2023^3-1)-2020^{2020}(2020^3-1)>0,\end{gathered}$$

поскольку $2023^{2020}>2020^{2020}>0$, и $2023^3-1>2020^3-1>0$, поэтому

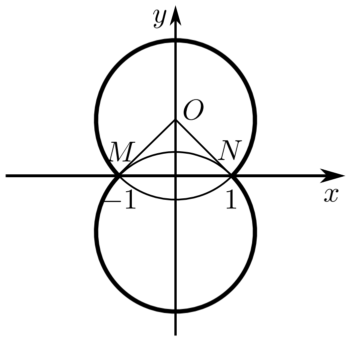
$$\frac{2023^{2023}+2020^{2020}}{2023^{2020}+2020^{2023}}>1,$$

поскольку числитель больше знаменателя.

Задача №7. Постройте кривую, все точки которой определяются уравнением $y^2-2|y|=1-x^2$. Найдите площадь фигуры, ограниченной этой кривой.

Решение: При $y\ge 0$ уравнение приводится к виду $y^2-2y+x^2=1 \Rightarrow y^2-2y+1+x^2=2 \Rightarrow (y-1)^2+x^2=(\sqrt{2})^2$.

Графиком этого уравнения является дуга окружности с центром в точке $O(0;1)$, радиусом $\sqrt{2}$, крайними точками $M(-1;0)$ $N(1;0)$; при $y<0$ имеем уравнение, графиком которого является дуга, симметричная предыдущей дуге относительно оси OX.



Найдем площадь половины фигуры, ограниченной отрезком MN и частью окружности над ним. Она равна разности площади круга с центром в точке O и площади сектора этого круга MON плюс площадь треугольника MON.

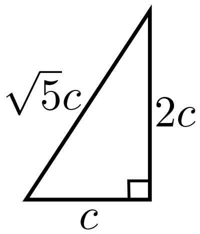
$S_{\text{круга}} = \pi(\sqrt{2})^2 = 2\pi$. Так как центральный угол сектора MON равен $\dfrac{\pi}{2}$, то площадь сектора $S_{\text{сект.}} = \dfrac{1}{2}(\sqrt{2})^2 \cdot \dfrac{\pi}{2} = \dfrac{\pi}{2}$. Площадь треугольника MON равна 1. Поэтому площадь половины фигуры равна $2\pi - \dfrac{\pi}{2} + 1 = \dfrac{3\pi}{2} + 1$. А площадь всей фигуры вдвое больше: $3\pi + 2$.

Ответ: $3\pi + 2$.

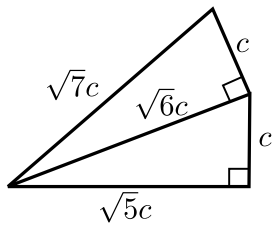
Задача №8. Зная заданный отрезок a, с помощью циркуля и линейки (без шкалы деления) построить отрезок $b = a \cdot \frac{2+\sqrt{7}}{1+\sqrt{11}}$.

Решение:

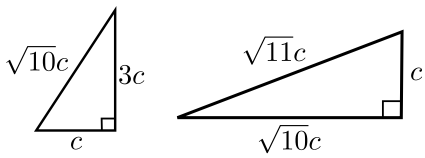
1. Берем произвольный отрезок c. Строим прямоугольный треугольник со сторонами c и $2c$:



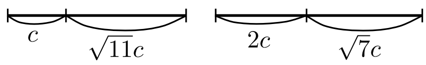
2. Находим $\sqrt{7}c$ по схеме:



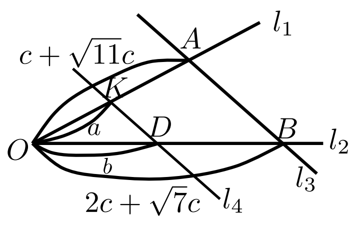
3. Строим отрезок $\sqrt{11}c$:



4. Строим отрезки $c + \sqrt{11}c$ и $2c + \sqrt{7}c$:



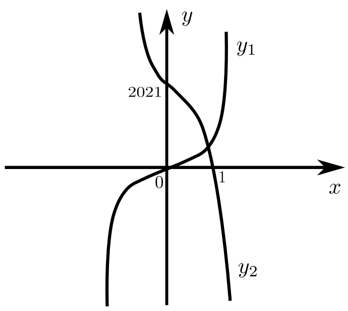
5. На лучах l_1 и l_2, образующих острый угол, откладываем отрезки $c + \sqrt{11}c$ и $2c + \sqrt{7}c$ и проводим прямую l_3.



Откладываем на луче l_1 отрезок a и через точку K проводим прямую $l_4||l_3$. Тогда $OD = b$, следует из подобия треугольников OAB и OKD:

$$\frac{b}{a} = \frac{2c + \sqrt{7}c}{c + \sqrt{11}c} \Rightarrow b = a \cdot \frac{2 + \sqrt{7}}{1 + \sqrt{11}}.$$

Задача №9. Сколько действительных корней имеет уравнение $\sin^2 \frac{\pi}{7}x(x^{2023} + 2022x^3 - 2021) = 0$ на отрезке $x \in [-36, 34]$?



Решение: $\sin^2 \frac{\pi}{7}x = 0 \Rightarrow \frac{\pi}{7}x = \pi n$ $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$

1) $x = 7n$: $n = 0$, $x = 0$; $n = \pm 1$, $x = \pm 7$; $n = \pm 2$, $x = \pm 14$; $n = \pm 3$, $x = \pm 21$; $n = \pm 4$, $x = \pm 28$; $n = \pm 5$, $x = \pm 35$ (35 не подходит). На отрезке $[-36, 34]$ 10 корней.

2) $x^{2023} + 2022x^3 - 2021 = 0 \Rightarrow x^{2023} = -2022x^3 + 2021$

$y_1 = x^{2023}$ — нечетная функция.

$y_2 = -2022x^3 + 2021$

$y = x^{2023} + 2022x^3 - 2021$ имеет один корень на отрезке $[0, 1]$, поскольку $y(0) = -2021 < 0$, $y(1) = 2 > 0$.

Ответ: 11 корней.

Задача №10. Найти наибольшее значение параметра a, при котором многочлены $P(x) = 2x^3 + x^2 + x + a$ и $Q(x) = x^3 - 2x^2 + x + 2a$ имеют хотя бы один общий корень.

Решение: Очевидно, что такая постановка вопроса равносильна решению системы уравнений

$$\begin{cases} 2x^3 + x^2 + x + a = 0, \\ x^3 - 2x^2 + x + 2a = 0. \end{cases}$$

Вычитая второе уравнение из удвоенного первого, получим

$$3x^3 + 4x^2 + x = 0, \Rightarrow x(3x^2 + 4x + 1) = 0,$$

откуда $x_1 = 0$, а по теореме Виета $x_2 = -1$, $x_3 = -\frac{1}{3}$.

Рассмотрим три случая:

1) $x_1 = 0$, $a_1 = 0$;

2) $x_2 = -1$, $a_2 = -2 \cdot (-1)^3 - (-1)^2 - (-1) = 2$;

3) $x_3 = -\frac{1}{3}$, $a_3 = \frac{2}{27} - \frac{1}{9} + \frac{1}{3} = \frac{8}{27}$.

Значит, $a_{\max} = 2$.

Ответ: $a_{\max} = 2$.