XXXI Межрегиональная олимпиада школьников по математике «САММАТ-2023»

Заключительный тур

26 февраля 2023 года

10 класс

▷ **1 (10 баллов).** Найдите квадратный трехчлен $P(x)$, у которого один из корней совпадает с корнем многочлена $Q(x) = P(x) - 6x + 12$, а второй корень в три раза меньше наибольшего из корней многочлена $Q(x)$ и $Q(3) = -3$.

▷ **2 (10 баллов).** $\begin{cases} x_1(x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_{2023}) = 1, \\ x_2(x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_{2023}) = 3, \\ x_3(x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_{2023}) = 5, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{2023}(x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_{2023}) = 4045. \end{cases}$

▷ **3 (10 баллов).** На плоскости Oxy заданы две точки: $A(6,1)$ и $B(2,5)$. Найти наименьшую длину ломаной $AMNB$, если точка M лежит на оси Ox, а точка N — на оси Oy.

▷ **4 (10 баллов).** Сколько существует различных восьмизначных чисел, делящихся на 11, в десятичной записи которых ровно по одному разу встречаются цифры $\{4,5,6,7,8,9\}$, а оставшиеся две цифры — нули?

▷ **5 (10 баллов).** Решить систему уравнений $\begin{cases} \cos^3 x = \sin y; \\ \sin^3 x = \cos y. \end{cases}$

▷ **6 (10 баллов).** Найти решение уравнения в целых числах:

$$10 - \sqrt{x^2 + y^2 - 2x + 1} - \sqrt{x^2 + y^2 - 18x + 81} = 0.$$

▷ **7 (10 баллов).** Числа $\frac{5}{2}$, $-\frac{11}{2}$, $\frac{121}{10}$ являются членами некоторой арифметической прогрессии. Найти разность прогрессии, если известно, что первое из указанных чисел является ее шестым членом.

▷ **8 (10 баллов).** Существует ли четырехугольная пирамида, две противоположные боковые грани которой перпендикулярны плоскости основания пирамиды? Ответ обосновать.

▷ **9 (10 баллов).** Три равных окружности радиуса r расположены внутри окружности радиуса R, попарно касаются между собой и внешней окружности. Зная величину отрезка r, при помощи циркуля и линейки (без единицы измерения) построить отрезок R.

▷ **10 (10 баллов).** Дан треугольник $\triangle ABC$ с острым углом $\angle A$ такой, что $AB \neq AC$. На сторонах AB и AC вне треугольника построены квадраты $ABDE$ и $ACFG$ с центрами K и L. Оказалось, что точки D, E, F и G лежат на одной окружности ω с центром O. Найти угол $\angle A$ треугольника $\triangle ABC$.

ЖЕЛАЕМ УСПЕХА!!!

XXXI Межрегиональная олимпиада школьников по математике «САММАТ-2023»

Заключительный тур

26 февраля 2023 года

10 класс

▷ **1 (10 баллов).** Найдите квадратный трехчлен $P(x)$, у которого один из корней совпадает с корнем многочлена $Q(x) = P(x) - 6x + 12$, а второй корень в три раза меньше наибольшего из корней многочлена $Q(x)$ и $Q(3) = -3$.

▷ **2 (10 баллов).** $\begin{cases} x_1(x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_{2023}) = 1, \\ x_2(x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_{2023}) = 3, \\ x_3(x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_{2023}) = 5, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{2023}(x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_{2023}) = 4045. \end{cases}$

▷ **3 (10 баллов).** На плоскости Oxy заданы две точки: $A(6,1)$ и $B(2,5)$. Найти наименьшую длину ломаной $AMNB$, если точка M лежит на оси Ox, а точка N — на оси Oy.

▷ **4 (10 баллов).** Сколько существует различных восьмизначных чисел, делящихся на 11, в десятичной записи которых ровно по одному разу встречаются цифры $\{4,5,6,7,8,9\}$, а оставшиеся две цифры — нули?

▷ **5 (10 баллов).** Решить систему уравнений $\begin{cases} \cos^3 x = \sin y; \\ \sin^3 x = \cos y. \end{cases}$

▷ **6 (10 баллов).** Найти решение уравнения в целых числах:

$$10 - \sqrt{x^2 + y^2 - 2x + 1} - \sqrt{x^2 + y^2 - 18x + 81} = 0.$$

▷ **7 (10 баллов).** Числа $\frac{5}{2}$, $-\frac{11}{2}$, $\frac{121}{10}$ являются членами некоторой арифметической прогрессии. Найти разность прогрессии, если известно, что первое из указанных чисел является ее шестым членом.

▷ **8 (10 баллов).** Существует ли четырехугольная пирамида, две противоположные боковые грани которой перпендикулярны плоскости основания пирамиды? Ответ обосновать.

▷ **9 (10 баллов).** Три равных окружности радиуса r расположены внутри окружности радиуса R, попарно касаются между собой и внешней окружности. Зная величину отрезка r, при помощи циркуля и линейки (без единицы измерения) построить отрезок R.

▷ **10 (10 баллов).** Дан треугольник $\triangle ABC$ с острым углом $\angle A$ такой, что $AB \neq AC$. На сторонах AB и AC вне треугольника построены квадраты $ABDE$ и $ACFG$ с центрами K и L. Оказалось, что точки D, E, F и G лежат на одной окружности ω с центром O. Найти угол $\angle A$ треугольника $\triangle ABC$.

ЖЕЛАЕМ УСПЕХА!!!