XXXI Межрегиональная олимпиада школьников по математике «САММАТ-2023»

Заключительный тур

26 февраля 2023 года

11 класс

▷ **1 (10 баллов).** В треугольной пирамиде $ABCD$ на ребре AB взята точка P так, что $AP : PB = 1 : 2$, на ребре AD взята точка Q так, что $AQ : QD = 2 : 3$ и на ребре BC точка R такая, что $BR : RC = 3 : 1$. В каком отношении отрезок QR делится плоскостью CDP?

▷ **2 (10 баллов).** Пешеход, велосипедист и мотоциклист едут по шоссе в одну сторону с постоянными скоростями. В тот момент, когда мотоциклист догнал велосипедиста, пешеход обгонял их на 4 км. В тот момент, когда велосипедист догнал пешехода, мотоциклист обгонял их на 6 км. На сколько километров велосипедист отставал от мотоциклиста в тот момент, когда мотоциклист обгонял пешехода?

▷ **3 (10 баллов).** Последовательность $\{a_n\}$, $n \in \mathbb{N}$, задана такими равенствами: $a_1 = 2$, $a_2 = 1$ и $\frac{2}{a_n} = \frac{1}{a_{n-1}} + \frac{1}{a_{n+1}}$, $n \geq 2$. Найдите такие n, при которых $|a_n| \leq 10^{-3}$.

▷ **4 (10 баллов).** Длины сторон AB, AC, BC треугольника ABC, периметр которого равен 6, в указанном порядке являются последовательными членами некоторой арифметической прогрессии. Найдите ее разность, если угол $\angle BAC$ в два раза больше угла $\angle ABC$.

▷ **5 (10 баллов).** Вычислить площадь фигуры, ограниченной графиками функций: $y = 2\operatorname{arctg} x + \arcsin \frac{2x}{1+x^2}$, $y = 0$, $x = 2$, $x = 4$.

▷ **6 (10 баллов).** Пусть a и b натуральные числа такие, что несократимая дробь представима в виде суммы $\frac{a}{b} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots - \frac{1}{118} + \frac{1}{119}$. Докажите, что число a делится на 179.

▷ **7 (10 баллов).** Найти решение уравнения в натуральных числах x и y:

$$\sqrt{x^2 + y^2 - 2x - 6y + 10} + \sqrt{x^2 + y^2 - 18x - 6y + 90} - 10 = 0.$$

▷ **8 (10 баллов).** Вершины правильного 11-угольника раскрашены в 2 цвета: красный и синий. Может ли оказаться так, что для каждой вершины A этого 11-угольника найдутся такие красные вершины B и C, а также синие вершины D и E, что выполняются равенства $AB = AC$ и $AD = AE$.

▷ **9 (10 баллов).** Найти все значения параметра a, при которых уравнение $\frac{a^2+x^2-4x-6a-23}{\sqrt{a^2+ax-2x^2-2a-x+1}} = 0$ имеет единственное решение.

▷ **10 (10 баллов).** Дан треугольник $\triangle ABC$ с острым углом $\angle A$ такой, что $AB \neq AC$. На сторонах AB и AC вне треугольника построены квадраты $ABDE$ и $ACFG$ с центрами K и L. Оказалось, что точки D, E, F и G лежат на одной окружности ω с центром O. Доказать, что точка M пересечения прямых BE и CG лежит на окружности ω.

ЖЕЛАЕМ УСПЕХА!!!

XXXI Межрегиональная олимпиада школьников по математике «САММАТ-2023»

Заключительный тур

26 февраля 2023 года

11 класс

▷ **1 (10 баллов).** В треугольной пирамиде $ABCD$ на ребре AB взята точка P так, что $AP : PB = 1 : 2$, на ребре AD взята точка Q так, что $AQ : QD = 2 : 3$ и на ребре BC точка R такая, что $BR : RC = 3 : 1$. В каком отношении отрезок QR делится плоскостью CDP?

▷ **2 (10 баллов).** Пешеход, велосипедист и мотоциклист едут по шоссе в одну сторону с постоянными скоростями. В тот момент, когда мотоциклист догнал велосипедиста, пешеход обгонял их на 4 км. В тот момент, когда велосипедист догнал пешехода, мотоциклист обгонял их на 6 км. На сколько километров велосипедист отставал от мотоциклиста в тот момент, когда мотоциклист обгонял пешехода?

▷ **3 (10 баллов).** Последовательность $\{a_n\}$, $n \in \mathbb{N}$, задана такими равенствами: $a_1 = 2$, $a_2 = 1$ и $\frac{2}{a_n} = \frac{1}{a_{n-1}} + \frac{1}{a_{n+1}}$, $n \geq 2$. Найдите такие n, при которых $|a_n| \leq 10^{-3}$.

▷ **4 (10 баллов).** Длины сторон AB, AC, BC треугольника ABC, периметр которого равен 6, в указанном порядке являются последовательными членами некоторой арифметической прогрессии. Найдите ее разность, если угол $\angle BAC$ в два раза больше угла $\angle ABC$.

▷ **5 (10 баллов).** Вычислить площадь фигуры, ограниченной графиками функций: $y = 2\operatorname{arctg} x + \arcsin \frac{2x}{1+x^2}$, $y = 0$, $x = 2$, $x = 4$.

▷ **6 (10 баллов).** Пусть a и b натуральные числа такие, что несократимая дробь представима в виде суммы $\frac{a}{b} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots - \frac{1}{118} + \frac{1}{119}$. Докажите, что число a делится на 179.

▷ **7 (10 баллов).** Найти решение уравнения в натуральных числах x и y:

$$\sqrt{x^2 + y^2 - 2x - 6y + 10} + \sqrt{x^2 + y^2 - 18x - 6y + 90} - 10 = 0.$$

▷ **8 (10 баллов).** Вершины правильного 11-угольника раскрашены в 2 цвета: красный и синий. Может ли оказаться так, что для каждой вершины A этого 11-угольника найдутся такие красные вершины B и C, а также синие вершины D и E, что выполняются равенства $AB = AC$ и $AD = AE$.

▷ **9 (10 баллов).** Найти все значения параметра a, при которых уравнение $\frac{a^2+x^2-4x-6a-23}{\sqrt{a^2+ax-2x^2-2a-x+1}} = 0$ имеет единственное решение.

▷ **10 (10 баллов).** Дан треугольник $\triangle ABC$ с острым углом $\angle A$ такой, что $AB \neq AC$. На сторонах AB и AC вне треугольника построены квадраты $ABDE$ и $ACFG$ с центрами K и L. Оказалось, что точки D, E, F и G лежат на одной окружности ω с центром O. Доказать, что точка M пересечения прямых BE и CG лежит на окружности ω.

ЖЕЛАЕМ УСПЕХА!!!