САММАТ-2024
Решение задач 6 класса

Задача №1. Решить в натуральных числах уравнение $\overline{xxyy} = z^2$.

Решение: $\overline{xxyy} = y + 10y + 100x + 1000x = 11y + 1100x = z^2$, $11(y + 100x) = z^2$, следовательно, $z = 11t$, $t \in \mathbb{N}$.

$11(y+100x) = (11t)^2 \Rightarrow y+100x = 11t^2 \Rightarrow y+x+99x = 11t^2 \Rightarrow y+x = 11t^2-99x \Rightarrow y+x = 11(t^2-9x)$. Так как $y+x$ делится на 11 и $x \leq 9, y \leq 9$, то $y+x = 11$, тогда $t^2 - 9x = 1$, $t^2 = 9x+1$, где $1 \leq x \leq 9$.

Следовательно, $x = 7$, $t = 8$, $y = 4$, $z = 88$.

Ответ: $x = 7$, $y = 4$, $z = 88$.

Задача №2. При подготовке к олимпиаде по математике Кирилл решил в пять раз больше задач, чем Максим, а количество задач, решенных Андреем, в n раз больше числа задач, решенных Максимом (n — натуральное число). Если количество задач, решенных Андреем, увеличить вчетверо, то их станет на 69 задач больше, чем у Кирилла. Какое число задач решил каждый из мальчиков, если Андрей решил больше 30 задач.

Решение: Пусть Максим решил x задач, тогде Кирилл — $5x$, Андрей — nx. $5x + 69 = 4nx \Rightarrow x(4n-5) = 69 = 3 \cdot 23$.

Варианты:

$x = 1$, $4n-5 = 69$, $n = \dfrac{74}{4}$ не подходит;

$x = 69$, $4n-5 = 1$, $n = \dfrac{3}{2}$ не подходит;

$x = 23$, $4n-5 = 3$, $n = 2$, $5x = 115$, $nx = 2x = 46$;

$x = 3$, $4n+5 = 23$, $n = 7$, $5x = 15$, $nx = 7x = 21$.

Имеем 2 варианта: Кирилл — 115, Максим — 23, Андрей — 46 или Кирилл — 15, Максим — 3, Андрей — 21. По условию задачи Андрей решил больше 30 задач, поэтому остается только первый вариант.

Ответ: Кирилл — 115, Максим — 23, Андрей — 46.

Задача №3. Вместо букв поставьте цифры так, чтобы получилось верное равенство: $ABCCDEF + ABCCDEF = EFCAAFDB$.

Ответ: $8244316 + 8244316 = 16488632$. Возможны другие варианты?

Задача №4. При каком наименьшем целом значении n выполняется неравенство: $1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + 7 - \ldots + (-1)^{n+1} \cdot n \geq 2024$.

Решение: Составим таблицу значений суммы S_n левой части неравенства в зависимости от n:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	...
S_n	1	-1	2	-2	3	-3	4	-4	...
k	1		2		3		4		...

Обозначим через k номер положительных значений S_n: $k = 1, 2, \ldots, m$. Тогда значение каждого положительного члена суммы S_n совпадает со значением k, а значит m-тый положительный член равен 2024. Но каждому m соответствует нечетное значение $2n-1$, т.е. $2n-1 = 2024 \Rightarrow n = 4047$.

Ответ: 4047.

Задача №5. В Древнем Египте обыкновенные дроби $\frac{m}{n}$ $(m < n)$ представляли в виде суммы аликвотных дробей вида $\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \ldots + \frac{1}{k_n}$ $(k_1 \neq k_2 \neq \ldots \neq k_n$, $k_1 \geq 2, k_2 \geq 2, \ldots, k_n \geq 2)$. Например, $\frac{4}{5} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{20}$. Представьте дроби $\frac{2}{5}$; $\frac{23}{40}$; $\frac{2}{17}$ в виде суммы трех аликвотных дробей $\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3}$.

Решение: $\frac{2}{5} = \frac{1}{4} + \frac{1}{10} + \frac{1}{20} = \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{30}$
$\frac{23}{40} = \frac{1}{2} + \frac{1}{20} + \frac{1}{40}$
$\frac{2}{17} = \frac{1}{12} + \frac{1}{51} + \frac{1}{68}$

Задача №6. Коля купил 4 книги. За все книги без первой он заплатил 420 рублей, за все книги без второй — 400 рублей, за все книги без третьей — 380 рублей, а за все книги без четвертой — 360 рублей. Сколько рублей заплатил Коля за третью книгу?

Решение: Обозначим цену первой книги x, второй — y, третьей — z, четвертой — t. Тогда

$$\begin{cases} y + z + t = 420, \\ x + z + t = 400, \\ x + y + t = 380, \\ x + y + z = 360. \end{cases}$$

$$3x + 3y + 3z + 3t = 1560,$$
$$x + y + z + t = 520,$$
$$x + y + z + t - (x + y + t) = 520 - 380,$$
$$z = 140.$$

Ответ: 140 рублей.

Задача №7. Найдите наибольшее количество квартир в стоквартирном доме, суммы цифр номеров квартиры у которых одинаковы.

Решение: Минимальная сумма цифр в номере квартиры равна 1, это квартиры 1, 10 и 100, сумма цифр равна 2 у трех вартир: 2, 11, 20, количество квартир будет увеличиваться до суммы цифр, равной 9. После суммы 9 количество квартир уменьшается: сумма цифр равна 10 у 9 квартир: 19, 28, 37, 46, 55, 64, 73, 82, 91, 11 — у 8 и т.д. до 18, сумма цифр равна 18 у квартиры 99.

Наибольшее количество квартир с одинаковой суммой цифр имеет сумму 9. Это квартиры с номерами: 9, 18, 27, 36, 45, 54, 63, 72, 81, 90.

Ответ: 10.

Задача №8. При сложении всех трехзначных чисел, которые можно записать, не повторяя цифры в числе, получилось 4662. Запишите в ответе разность между наибольшим и наименьшим из получившихся трехзначных чисел.

Решение: Все трехзначные числа можно записать в виде $\overline{abc} = 100a + 10b + c$, где a, b, c — цифры сотен, десятков и единиц соответственно. Пусть x, y, z — цифры, из которых составлены трехзначные числа. Из трех цифр можно составить 6 трехзначных чисел с неповторяющимися цифрами. Тогда

$$\overline{xyz} + \overline{xzy} + \overline{yxz} + \overline{yzx} + \overline{zxy} + \overline{zyx} =$$
$$= 100x + 10y + z + 100x + 10z + y + 100y + 10x + z + 100y + 10z + x +$$
$$+ 100z + 10x + y + 100z + 10y + x = 222(x + y + z)$$
$$222(x + y + z) = 4662$$
$$x + y + z = 21$$

Существует три тройки различных однозначных чисел, дающих в сумме 21, это (4, 8, 9), (5, 7, 9) и (6, 7, 8). Наибольшее число из этих цифр 984, а наименьшее 489. Их разность 495.

Ответ: 495.

Задача №9. Любитель арифметики записал в ряд 2024 числа так, что сумма любых четырех соседних чисел равна 100. На первом месте стоит 11, на втором — 22, а на последнем — 33. Какое число стоит на третьем месте?

Решение: Так как сумма первого, второго, третьего и четвертого чисел равна сумме второго, третьего, четвертого и пятого чисел, то на первом и пятом местах стоят одинаковые числа. Аналогично, любые числа, номера мест которых отличаются на четыре, равны друг другу. Значит, на четвертом месте стоит то же число, что и на последнем (так как разность 2024 и 4 кратна четырем), т.е. число 33. Тогда на третьем месте стоит число $100 - 11 - 22 - 33 = 34$.

Ответ: 34.

Задача №10. Сравните числа

$$\frac{1}{8} + \frac{1}{24} + \frac{1}{48} + \frac{1}{80} + \frac{1}{120} + \frac{1}{168} + \dots + \frac{1}{1680} + \frac{1}{1848} + \frac{1}{2024} \quad \text{и} \quad \frac{6}{23}.$$

Решение: Найдем закономерность для чисел в знаменателе

$$\frac{1}{2\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 6} + \frac{1}{6\cdot 8} + \frac{1}{8\cdot 10} + \frac{1}{10\cdot 12} + \frac{1}{12\cdot 14} + \dots + \frac{1}{40\cdot 42} + \frac{1}{42\cdot 44} + \frac{1}{44\cdot 46} =$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{6} + \frac{1}{8} - \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{40} - \frac{1}{42} + \frac{1}{42} - \frac{1}{44} + \frac{1}{44} - \frac{1}{46}\right) =$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{46}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{23-1}{46} = \frac{11}{46} < \frac{6}{23}$$

Ответ: Первое число меньше второго.