САММАТ-2024
Решение задач 7 класса

Задача №1. В два кувшина одинакового веса налили разное количество воды, причем вес воды во втором кувшине на 500 г больше веса в первом кувшине. Вес первого кувшина с водой составляет 80% веса второго кувшина с водой. Из второго кувшина перелили воду в первый кувшин. В результате вес первого кувшина с водой оказался в 8 раз больше, чем вес второго пустого кувшина. Найти вес пустых кувшинов и вес воды, налитой первоначально в кувшины.

Решение: Пусть вес каждого кувшина равен x, вес воды в первом кувшине — x, во втором — y. Тогда вес первого кувшина с водой — $(x+z)$, второго — $(x+y)$. Получим

$\begin{cases} x+z=0{,}8(x+y) \\ x+y+z=8x \\ z+500=y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+z=0{,}8(x+z+500) \\ x+z+z+500=8x \end{cases} \Rightarrow x+z=400\cdot 5=2000 \Rightarrow$ $z=2000-x \Rightarrow 7x-2(2000-x)=500 \Rightarrow 7x+2x=4500 \Rightarrow x=500,\ z=1500,$ $y=2000.$

Ответ: вес пустых кувшинов — 500, воды в первом — 1500, во втором — 2000 г.

Задача №2. Каждый из двух братьев получил в подарок перед Рождеством по адвент-календарю с конфетами. Утром они съели по несколько конфет, и при этом так ими наелись, что больше уже целый день не ели сладости. Но вечером старший брат незаметно забрал треть оставшихся у младшего брата конфет себе, затем младший также незаметно забрал треть конфет старшего брата себе, и наконец, старший снова забрал треть конфет у младшего. В итоге у старшего брата осталось 14 конфет, а у младшего — 12. Сколько конфет было у каждого брата до того, как они начали забирать их друг у друга?

Решение: Последним шагом старший боат уменьшил конфет у младшего на треть. Значит, у младшего брата остались две части из трех, что составляет 12 конфет, т.е. одна часть составляет 6. Следовательно, перед этим у него было $12+6=18$ конфет, а у старшего $14-6=8$ конфет. Рассуждая аналогично, получим, что на предыдущем шаге одна часть составляет 4 конфеты, у старшего брата перед этим было $8+4=12$ конфет, а у младшего — $18-4=14$ конфет. И перед первым шагом у младшего брата было $14+7=21$ конфета, а у старшего — $12-7=5$ конфет.

Ответ: 5 и 21.

Задача №3. Может ли трехзначное число, не кратное 10, быть в три раза больше числа, записанного из его цифр в обратном порядке? Ответ обоснуйте.

Решение: Пусть исходное число $\overline{abc}=100a+10b+c$ и верно сформулированное утверждение. Тогда

$$100a+10b+c=300c+30b+3a,$$
$$97a=20b+299c.$$

Отсюда следует, что $a \geq \dfrac{299}{97}c=3\dfrac{8}{97}c$. Тогда возможны только два случая $c=1$ или $c=2$.

Если $c = 1$, то $97a = 20b + 299$ и число $97a$ оканчивается на 9 и, значит, $a = 7$ и $b = 19$. Получаем противоречие.

Если $c = 2$, то $97a = 20b + 598$ и число $97a$ оканчивается на 8 и, значит, $a = 4$ и $b = 10{,}5$. Получаем противоречие.

Ответ: Нет.

Задача №4. Задан отрезок AE длиной 33. На отрезке AE заданы точки B, C, D такие, что длина отрезка BC в 1,5 раза больше длины отрезка AB, длина отрезка CD на 3 больше длины отрезка BC, а длина DE составляет 350% от длины AB. Сколько треугольников можно образовать, использовав в качестве их сторон отрезки AB, BC, CD и DE. В ответе привести количество треугольников и длины их сторон.

$AB = x$, $BC = \frac{3}{2}x$, $CD = \frac{3}{2}x + 3$, $DE = 3{,}5x$. $x + \frac{3}{2}x + \frac{3}{2}x + 3 + 3\frac{1}{2}x = 33 \Rightarrow \frac{15x}{2} = 30$ $\Rightarrow x = 4$.

Длины: $AB = 4$, $BC = 6$, $CD = 9$, $DE = 14$. Если отрезок AB обозначить как I, BC — II, CD — III, DE — IV, то формально получим 4 комбинации:
I + II + III: $4 + 6 > 9$ можно;
I + II + IV: $4 + 6 < 14$ нельзя;
I + III + IV: $4 + 9 < 14$ нельзя;
II + III + IV: $6 + 9 > 14$ можно.

Вторая и третья комбинации не возможны: сумма длин двух сторон меньше длины третьей стороны. Поэтому ответ: 2 треугольника со сторонами $\{4, 6, 9\}$ и $\{6, 9, 14\}$.

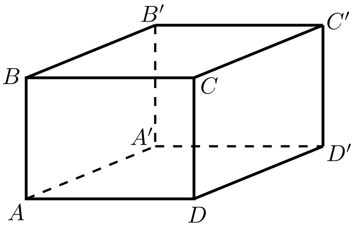
Ответ: 2 треугольника со сторонами $\{4, 6, 9\}$ и $\{6, 9, 14\}$.

Задача №5. Цифры четырехзначного числа, кратного 5, записали в обратном порядке и получили второе четырехзначное число. Если из первого числа вычесть второе, то результат будет равен 4536. Найдите исходное четырехзначное число. Укажите все возможные варианты и объясните, почему нет других вариантов.

Решение: Пусть исходное число $A = \overline{abcd}$. Тогда второе число $B = \overline{dcba}$. Так как A кратно 5 и B четырехзначно, то $d = 5$. Тогда $A - B = 999a + 90b - 90c - 4995 = 4536$. Разделим обе части последнего равенства на девять: $111a + 10b - 10c = 1059$ или $10(b - c) = 1059 - 111a$. Следовательно, $(1059 - 111a) \vdots 10$ откуда $a = 9$. Имеем, что $(b - c) = 6$. Учитывая, что b и c — цифры, перечислим все возможные пары: $\begin{cases} b = 9 \\ c = 3 \end{cases}$, $\begin{cases} b = 8 \\ c = 2 \end{cases}$, $\begin{cases} b = 7 \\ c = 1 \end{cases}$, $\begin{cases} b = 6 \\ c = 0 \end{cases}$.

Ответ: 9935, 9825, 9715, 9605.

Задача №6. В деревянном брусе с прямоугольным сечением со сторонами 50 см и 80 см и длиной 200 см закрашены две грани, а остальные не закрашены. Затем брус распилили параллельно граням на кубики с ребром 10 см. Найдите число получившихся после разрезания неокрашенных кубиков. Найти все решения.



Решение: Окрашенными могут быть либо противоположные грани, либо — смежные. Всего кубиков $5 \times 8 \times 20 = 800$.

Сечение $ABCD$ — №1, $CC'D'D$ — №2, $ADD'A'$ — №3.

Варианты:
$1-1$: $800-(5\times 8)\cdot 2=720$;
$2-2$: $800-(20\times 5)\cdot 2=600$;
$3-3$: $800-(20\times 8)\cdot 2=480$;
$1-2$: $800-(5\times 8+5\times 19)\cdot 2=665$;
$1-3$: $800-(5\times 8+8\times 19)\cdot 2=608$;
$3-2$: $800-(5\times 8+4\times 20)\cdot 2=560$.

Ответ: 480, 500, 600, 608, 665, 720.

Задача №7. Найдите две последние цифры числа 2023^{2024}.

Решение: На последние 2 цифры числа 2023^{2024} влияют только последние 2 цифры числа 2023. Т.е. задача может быть решена простым перебором остатков от деления на 100 степеней числа 23. Остатки будут циклически повторяться. Главное не ошибиться, какой взять.

Решение на основе вычетов.

$2023 \equiv 23(mod 100) \Rightarrow 2023^{2024} \equiv 23^{2024}(mod 100)$. НОД(100,23)=1, поэтому $23^{4(100)} \equiv 1(mod 100)$ — теорема Эйлера, $\varphi(m)$ — функция Эйлера. $\varphi(100)=\varphi(2^2\cdot 5^2)=$ $=(10-5)(10-2)=40$, поэтому $23^{40}\equiv 1(mod 100)$, т.е. $23^{2024}=23^{24}\cdot(23^{40})^{50}(mod 100)=$ $=23^{24}(mod 100)$. Осталось найти остаток от деления числа 23^{24} на 100. $23^2=29(mod 100)$, $23^4 \equiv 41(mod 100)$, $23^{12}=(23^4)^3\equiv 41^3(mod 100)=21(mod 100)$, $23^{24}=(23^{12})^2\equiv$ $\equiv 21^2(mod 100)=41(mod 100)$.

Ответ: 41.

Задача №8. В выставке-конкурсе художественного творчества принимали участие от 30 до 63 детей из 4 и 5 классов художественной школы. Каждый пятиклассник представил на конкурс по 12 рисунков, выполненных карандашом, и 5 пейзажей, выполненных красками, а четвероклассник по 2 рисунка и 6 пейзажей. Общее количество представленных рисунков и пейзажей оказалось одинаково. Сколько человек участвовало в конкурсе, если пятиклассников было больше 17?

Решение: Пусть x — количество пятиклассников, y — четвероклассников. Тогда
$$x\cdot 12+y\cdot 2=x\cdot 5+y\cdot 6 \Rightarrow 7x=4y \Rightarrow \frac{x}{y}=\frac{4}{7} \Rightarrow \begin{cases} x=4t \\ y=7t \end{cases}$$

t	$x+y$	x	y
1	11	4	7
2	22	8	14
3	33	12	21
4	44	16	28
5	55	20	35
6	66	24	42

По общему количеству удовлетворяют варианты при $t=3,4,5$, но с учетом, что $x>17$ остается только вариант при $t=5$. Тогда $x+y=55$.

Ответ: 55.

Задача №9. В составлении 40 задач приняло участие 30 студентов со всех 5 курсов. Любые два однокурсника придумали одинаковое число задач. Любые два студента с разных курсов придумали разное число задач. Сколько человек придумало 1 задачу?

Решение: Для каждого студента выпишем количество задач, которые он придумал. По условию задачи, среди этих чисел встречается не менее пяти различных, всего выписано 30 чисел и сумма написанных чисел равна 40.

Поскольку выписано 30 чисел и среди них встречается не менее пяти различных, никакое число не может встречаться более 26 раз. Действительно, если какое-то число встречается 27 раз, то остается всего 3 числа, и среди них не может быть 4 раздичных. С другой стороны, если единица встречается менее 26 раз то кроме нее встречаются 4 числа, не меньше 2, 3, 4 и 5, и еще одно число, не меньшее 2. Следовательно, сумма всех выписанных чисел не меньше $25 + 2 \cdot 2 + 3 + 4 + 5 = 41$, что противоречит условию задачи. Итак, единиц может быть только 26, то есть одну задачу могли придумать только 26 студентов.

Остается привести пример, когда одну задачу придумали ровно 26 студентов. Это возможно в следующей ситуации: каждый студент придумал столько задач, каков номер его курса, причем в составлении задач с первого курса принимало участие 26 студентов, а с остальных — по одному студенту.

Ответ: 26.

Задача №10. Два человека A и B должны попасть из пункта M в пункт N, расположенный в 15 км от M. Пешком они могут передвигаться со скоростью 6 км/ч. Кроме того, в их распоряжении есть велосипед, на котором можно ехать со скоростью 15 км/ч. A отправляется в путь пешком, а B выезжает одновременно с A и едет на велосипеде до встречи с пешеходом C, идущим из N в M. Дальше B идет пешком, а C едет на велосипеде до встречи с A и передает ему велосипед, на котором тот и приезжает в N. Когда должен выйти из N пешеход C, чтобы A и B прибыли в пункт N одновременно (если он идет пешком с той же скоростью, что A и B)?

Решение: Чтобы A и B прибыли в пункт N одновременно, они должны пройти пешком одно и то же расстояние x и проехать на велосипеде одно и то же расстояние $15-x$. Тогда C до встречи с B тоже должен пройти пешком расстояние x. Поэтому C до встречи с A проедет на велосипеде $15 - 2x$, а после этого A проедет на велосипеде $15 - x$. Всего A и C вместе проедут на велосипеде $(15 - x) + (15 - 2x) = 30 - 3x$. За это же время B пройдет пешком расстояние x, поэтому $\frac{30 - 3x}{15} = \frac{x}{6}$, т.е. $x = \frac{60}{11}$. Следовательно, B до встречи с C едет $\frac{15 - x}{15} = \frac{1}{15} \cdot \frac{105}{11} = \frac{7}{11}$ ч, а C до встречи с B идет $\frac{x}{6} = \frac{1}{6} \cdot \frac{60}{11} = \frac{10}{11}$ ч, поэтому C должен выйти из N за $\frac{3}{11}$ ч до того, как A и B отправятся в путь из M.

Ответ: Пешеход C должен выйти из N за $\frac{3}{11}$ часа до того, как A и B отправятся в путь из M.