XXXIII Межрегиональная олимпиада школьников по математике «САММАТ-2025»

Заключительный тур

9 февраля 2025 года

6 класс

▷ **1 (10 баллов).** Распределите числа 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 на две группы так, чтобы сумма любых двух чисел в одной группе не была равна никакому числу из второй группы.

▷ **2 (10 баллов).** Для упаковки самоваров имеются ящики, из них в одни помещаются 4 самовара, а в другие — 7. Сколько всего нужно взять ящиков, чтобы упаковать 41 самовар.

▷ **3 (10 баллов).** На доске написали последовательно натуральные числа от 1 до 2025. Далее из них вычеркнули числа, кратные 3, 5 и 12. Сколько незачёркнутых чисел осталось на доске?

▷ **4 (10 баллов).** На доске были написаны два различных натуральных числа, у которых наименьшее общее кратное 2025, а наибольший общий делитель — 9. Найдите эти числа.

▷ **5 (10 баллов).** Найти наибольшее и наименьшее значение периметра треугольника в натуральных числах со сторонами 3, 5 и a.

▷ **6 (10 баллов).** Пусть $A = 7x + 3y$, $B = 4x + 5y$, где x и y — натуральные числа. Доказать, что A делится на 23 тогда и только тогда, когда и B делится на 23.

▷ **7 (10 баллов).** Даша и Маша подписывают поздравительные открытки, каждой необходимо подписать комплект из 20 штук. Даша пишет поздравления в 2 раза быстрее, чем Маша. Через некоторое время Даша решает помочь подруге и обменивается не подписанными открытками. Момент обмена был выбран удачно, так как оставшуюся работу девочки закончили одновременно. Сколько открыток девочки подписали до того, как обменялись комплектами?

▷ **8 (10 баллов).** Комплект настольной мозаики состоит из 102 квадратных фишек одинакового размера. Составьте из них два прямоугольника так, чтобы у них были одинаковые периметры. Все фишки должны быть использованы.

▷ **9 (10 баллов).** На первой чаше весов лежат одинаковые по весу леденцы, а на другой — одинаковые по весу пластмассовые шарики. Весы находятся в равновесии. Всего 2025 предметов. Если из первой чаши убрать 21 леденец, то для того, чтобы уравновесить весы необходимо переложить из второй чаши 7 шариков в чашу в леденцами. Сколько леденцов было вначале на первой чаше?

▷ **10 (10 баллов).** Петя торопился в школу, поэтому за две трети времени от выхода до начала уроков он прошёл три четверти пути. После чего уменьшил скорость и пришёл в школу вовремя. Во сколько раз он уменьшил скорость?

ЖЕЛАЕМ УСПЕХА!!!

XXXIII Межрегиональная олимпиада школьников по математике «САММАТ-2025»

Заключительный тур

9 февраля 2025 года

6 класс

▷ **1 (10 баллов).** Распределите числа 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 на две группы так, чтобы сумма любых двух чисел в одной группе не была равна никакому числу из второй группы.

▷ **2 (10 баллов).** Для упаковки самоваров имеются ящики, из них в одни помещаются 4 самовара, а в другие — 7. Сколько всего нужно взять ящиков, чтобы упаковать 41 самовар.

▷ **3 (10 баллов).** На доске написали последовательно натуральные числа от 1 до 2025. Далее из них вычеркнули числа, кратные 3, 5 и 12. Сколько незачёркнутых чисел осталось на доске?

▷ **4 (10 баллов).** На доске были написаны два различных натуральных числа, у которых наименьшее общее кратное 2025, а наибольший общий делитель — 9. Найдите эти числа.

▷ **5 (10 баллов).** Найти наибольшее и наименьшее значение периметра треугольника в натуральных числах со сторонами 3, 5 и a.

▷ **6 (10 баллов).** Пусть $A = 7x + 3y$, $B = 4x + 5y$, где x и y — натуральные числа. Доказать, что A делится на 23 тогда и только тогда, когда и B делится на 23.

▷ **7 (10 баллов).** Даша и Маша подписывают поздравительные открытки, каждой необходимо подписать комплект из 20 штук. Даша пишет поздравления в 2 раза быстрее, чем Маша. Через некоторое время Даша решает помочь подруге и обменивается не подписанными открытками. Момент обмена был выбран удачно, так как оставшуюся работу девочки закончили одновременно. Сколько открыток девочки подписали до того, как обменялись комплектами?

▷ **8 (10 баллов).** Комплект настольной мозаики состоит из 102 квадратных фишек одинакового размера. Составьте из них два прямоугольника так, чтобы у них были одинаковые периметры. Все фишки должны быть использованы.

▷ **9 (10 баллов).** На первой чаше весов лежат одинаковые по весу леденцы, а на другой — одинаковые по весу пластмассовые шарики. Весы находятся в равновесии. Всего 2025 предметов. Если из первой чаши убрать 21 леденец, то для того, чтобы уравновесить весы необходимо переложить из второй чаши 7 шариков в чашу в леденцами. Сколько леденцов было вначале на первой чаше?

▷ **10 (10 баллов).** Петя торопился в школу, поэтому за две трети времени от выхода до начала уроков он прошёл три четверти пути. После чего уменьшил скорость и пришёл в школу вовремя. Во сколько раз он уменьшил скорость?

ЖЕЛАЕМ УСПЕХА!!!

XXXIII Межрегиональная олимпиада школьников по математике «САММАТ-2025»

Заключительный тур

9 февраля 2025 года

7 класс

▷ **1 (10 баллов).** Комплект настольной мозаики состоит из 146 квадратных фишек одинакового размера. Составьте из них три прямоугольника так, чтобы у них были одинаковые периметры. Все фишки должны быть использованы.

▷ **2 (10 баллов).** В прямоугольнике $ABCD$ на диагонали BD отметили точки F и M, так что $AB = BM$, $AD = DF$, $\angle FCM = 50^\circ$. Найдите, чему равна сумма углов $\angle AFC + \angle CMA$.

▷ **3 (10 баллов).** На доске написано

$$\frac{1}{2025} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}.$$

Существуют ли различные натуральные числа a, b и c такие, что выполняется данное равенство. Если да, то приведите пример.

▷ **4 (10 баллов).** Докажите, что число $(2025)^3 + 17 \cdot 2025$ нацело делится на 6.

▷ **5 (10 баллов).** На теннисный турнир в лагере собралось 27 человек. Первая девочка — Оля — сыграла партии с четырьмя мальчиками, вторая — Катя — с пятью, третья — Настя — с шестью, и так далее до Маши, которая сыграла партии со всеми мальчиками. Сколько мальчиков участвовало в теннисном турнире? На игре могли присутствовать и другие девочки, кроме четырёх названных.

▷ **6 (10 баллов).** Даны двадцать шесть целых чисел $a, b, c, d, \ldots, z$ такие, что выполняется равенство: $(1 + ab)(1 + abc)\ldots(1 + abc\ldots z) = 0$. Докажите, что $(a + b)(a + bc)\ldots(a + bc\ldots z) = 0$.

▷ **7 (10 баллов).** Известно, что одна сторона треугольника равна 3, а его периметр равен 15. Найти все такие треугольники, стороны которых измеряются натуральными числами.

▷ **8 (10 баллов).** В четырёхугольнике заданы его вершины: $A(0, -3)$, $B(-3, 6)$, $C(4, 5)$, $D(6, 3)$. Найдите координаты точки пересечения прямых, проходящих через точки A и C, и через точки B и D.

▷ **9 (10 баллов).** При проектировании дома, в котором должно быть не менее 100 квартир, необходимо учитывать спрос на различные виды квартир. Потребность в двухкомнатных в 4 раза больше, чем спрос на однокомнатные, при этом число трёхкомнатных квартир должно быть кратно числу однокомнатных. При повышении запросов на трёхкомнатные квартиры есть возможность увеличить их количество в 5 раз, при этом их станет на 22 больше, чем двухкомнатных. Сколько квартир может быть в доме?

▷ **10 (10 баллов).** Известно, что число $(2x+3y)$ делится на 17 для некоторых целых чисел x и y. Делится ли число $13x + 11y$ на 17?

ЖЕЛАЕМ УСПЕХА!!!

XXXIII Межрегиональная олимпиада школьников по математике «САММАТ-2025»

Заключительный тур

9 февраля 2025 года

7 класс

▷ **1 (10 баллов).** Комплект настольной мозаики состоит из 146 квадратных фишек одинакового размера. Составьте из них три прямоугольника так, чтобы у них были одинаковые периметры. Все фишки должны быть использованы.

▷ **2 (10 баллов).** В прямоугольнике $ABCD$ на диагонали BD отметили точки F и M, так что $AB = BM$, $AD = DF$, $\angle FCM = 50^\circ$. Найдите, чему равна сумма углов $\angle AFC + \angle CMA$.

▷ **3 (10 баллов).** На доске написано

$$\frac{1}{2025} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}.$$

Существуют ли различные натуральные числа a, b и c такие, что выполняется данное равенство. Если да, то приведите пример.

▷ **4 (10 баллов).** Докажите, что число $(2025)^3 + 17 \cdot 2025$ нацело делится на 6.

▷ **5 (10 баллов).** На теннисный турнир в лагере собралось 27 человек. Первая девочка — Оля — сыграла партии с четырьмя мальчиками, вторая — Катя — с пятью, третья — Настя — с шестью, и так далее до Маши, которая сыграла партии со всеми мальчиками. Сколько мальчиков участвовало в теннисном турнире? На игре могли присутствовать и другие девочки, кроме четырёх названных.

▷ **6 (10 баллов).** Даны двадцать шесть целых чисел $a, b, c, d, \ldots, z$ такие, что выполняется равенство: $(1 + ab)(1 + abc)\ldots(1 + abc\ldots z) = 0$. Докажите, что $(a + b)(a + bc)\ldots(a + bc\ldots z) = 0$.

▷ **7 (10 баллов).** Известно, что одна сторона треугольника равна 3, а его периметр равен 15. Найти все такие треугольники, стороны которых измеряются натуральными числами.

▷ **8 (10 баллов).** В четырёхугольнике заданы его вершины: $A(0, -3)$, $B(-3, 6)$, $C(4, 5)$, $D(6, 3)$. Найдите координаты точки пересечения прямых, проходящих через точки A и C, и через точки B и D.

▷ **9 (10 баллов).** При проектировании дома, в котором должно быть не менее 100 квартир, необходимо учитывать спрос на различные виды квартир. Потребность в двухкомнатных в 4 раза больше, чем спрос на однокомнатные, при этом число трёхкомнатных квартир должно быть кратно числу однокомнатных. При повышении запросов на трёхкомнатные квартиры есть возможность увеличить их количество в 5 раз, при этом их станет на 22 больше, чем двухкомнатных. Сколько квартир может быть в доме?

▷ **10 (10 баллов).** Известно, что число $(2x+3y)$ делится на 17 для некоторых целых чисел x и y. Делится ли число $13x + 11y$ на 17?

ЖЕЛАЕМ УСПЕХА!!!

XXXIII Межрегиональная олимпиада школьников по математике «САММАТ-2025»

Заключительный тур

9 февраля 2025 года

8 класс

▷ **1 (10 баллов).** В некоторый момент времени минутная и часовая стрелки часов образуют угол 33°. Через какое наименьшее время стрелки опять смогут образовать угол в 33°?

▷ **2 (10 баллов).** Установить, какая из дробей больше: $\dfrac{10^{10}+1}{10^{11}+1}$ или $\dfrac{10^{11}+1}{10^{12}+1}$?

▷ **3 (10 баллов).** На базе университета организовано дополнительное образование для детей — детский университет. Программу по спортивной робототехнике осваивают 19 человек, шахматный клуб посещают 20 и 22 человека изучают основы 3D-графики. Из них выбрали робототехнику и шахматы 7, шахматы и 3D-графику — 8, робототехнику и 3D-графику — 5, а все три программы осваивают 3 человека. Кроме этого в детском университете на других программах обучаются 156 человек. Сколько всего детей занимаются в детском университете?

▷ **4 (10 баллов).** Вычислить значение выражения

$$X=\sqrt{20\sqrt{3}+37}-\sqrt{|20\sqrt{3}-37|}.$$

▷ **5 (10 баллов).** Костя, Павел и Саша сдают норматив по бегу на лыжах. Костя бегает быстрее Павла, но медленнее Саши. Одновременно стартовав по круговой трассе из одного места в одном направлении, они остановились в тот момент, когда все трое были в одном месте. За это время Саша обогнал Павла 13 раз. Сколько всего было обгонов?

▷ **6 (10 баллов).** В треугольнике ABC проведены высота AH и биссектриса BD, пересекающиеся в точке O. Величины углов ABC и BCA относятся как $3:2$, а угол $BAC=80°$. Установить, длина какого из отрезков BO или OD больше.

▷ **7 (10 баллов).** Построить график функции

$$y=\sqrt{x^2+2\sqrt{3}x+3}-\sqrt{x^2-2\sqrt{3}x+3}.$$

▷ **8 (10 баллов).** Сколько различных пар взаимно простых натуральных чисел m и n $(m>n)$ существует таких, что частное многочленов $m^3-m^2+m^2n-n^2m+n^2-n^3$ и m^2-n^2 равно 17?

▷ **9 (10 баллов).** Разность двух чисел равна 8, а их произведение 21. Чему равна разность кубов этих чисел?

▷ **10 (10 баллов).** Найти все возможные целочисленные положительные решения квадратного уравнения $x^2-10x+a^2=0$, где $a\in\mathbb{R}$.

ЖЕЛАЕМ УСПЕХА!!!

XXXIII Межрегиональная олимпиада школьников по математике «САММАТ-2025»

Заключительный тур

9 февраля 2025 года

8 класс

▷ **1 (10 баллов).** В некоторый момент времени минутная и часовая стрелки часов образуют угол 33°. Через какое наименьшее время стрелки опять смогут образовать угол в 33°?

▷ **2 (10 баллов).** Установить, какая из дробей больше: $\dfrac{10^{10}+1}{10^{11}+1}$ или $\dfrac{10^{11}+1}{10^{12}+1}$?

▷ **3 (10 баллов).** На базе университета организовано дополнительное образование для детей — детский университет. Программу по спортивной робототехнике осваивают 19 человек, шахматный клуб посещают 20 и 22 человека изучают основы 3D-графики. Из них выбрали робототехнику и шахматы 7, шахматы и 3D-графику — 8, робототехнику и 3D-графику — 5, а все три программы осваивают 3 человека. Кроме этого в детском университете на других программах обучаются 156 человек. Сколько всего детей занимаются в детском университете?

▷ **4 (10 баллов).** Вычислить значение выражения

$$X=\sqrt{20\sqrt{3}+37}-\sqrt{|20\sqrt{3}-37|}.$$

▷ **5 (10 баллов).** Костя, Павел и Саша сдают норматив по бегу на лыжах. Костя бегает быстрее Павла, но медленнее Саши. Одновременно стартовав по круговой трассе из одного места в одном направлении, они остановились в тот момент, когда все трое были в одном месте. За это время Саша обогнал Павла 13 раз. Сколько всего было обгонов?

▷ **6 (10 баллов).** В треугольнике ABC проведены высота AH и биссектриса BD, пересекающиеся в точке O. Величины углов ABC и BCA относятся как $3:2$, а угол $BAC=80°$. Установить, длина какого из отрезков BO или OD больше.

▷ **7 (10 баллов).** Построить график функции

$$y=\sqrt{x^2+2\sqrt{3}x+3}-\sqrt{x^2-2\sqrt{3}x+3}.$$

▷ **8 (10 баллов).** Сколько различных пар взаимно простых натуральных чисел m и n $(m>n)$ существует таких, что частное многочленов $m^3-m^2+m^2n-n^2m+n^2-n^3$ и m^2-n^2 равно 17?

▷ **9 (10 баллов).** Разность двух чисел равна 8, а их произведение 21. Чему равна разность кубов этих чисел?

▷ **10 (10 баллов).** Найти все возможные целочисленные положительные решения квадратного уравнения $x^2-10x+a^2=0$, где $a\in\mathbb{R}$.

ЖЕЛАЕМ УСПЕХА!!!

XXXIII Межрегиональная олимпиада школьников по математике «САММАТ-2025»

Заключительный тур

9 февраля 2025 года

9 класс

▷ **1 (10 баллов).** Найти все трёхзначные числа, у которых числа сотен, десятков и единиц не являются нечётными, и известно, что сумма квадратов чисел сотен и десятков не превосходит числа сотен, умноженного на 4, а квадрат числа единиц превосходит квадрат суммы чисел сотен и десятков более чем на 40.

▷ **2 (10 баллов).** Решить систему уравнений: $\begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{x+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{y+3}}=\dfrac{5}{6}; \\ \dfrac{1}{\sqrt{x+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{11-z}}=\dfrac{5}{6}; \\ \dfrac{1}{\sqrt{y+3}}+\dfrac{1}{\sqrt{11-z}}=\dfrac{2}{3}. \end{cases}$

▷ **3 (10 баллов).** Четыре последовательных члена геометрической прогрессии a_3, a_4, a_5, a_6 удовлетворяют условиям: $\begin{cases} a_3+a_4+a_5-a_6=-12; \\ a_3+a_4+a_6-a_5=84; \\ a_3+a_5+a_6-a_4=132; \\ a_4+a_5+a_6-a_3=156. \end{cases}$
Найти сумму первых восьми членов этой прогрессии.

▷ **4 (10 баллов).** Решить в натуральных x и y следующее уравнение: $\sqrt{-2x^2+21x-10}+\sqrt{-y^2-2y+24}=7$.

▷ **5 (10 баллов).** Задана функция $f(x)=2x+5$. Аргумент x образует арифметическую прогрессию $\{x_n\}$, $n=\overline{1,100}$, с первым членом $x_1=1$ и суммой первых ста членов, равной 10000. Вычислить $f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)+\ldots+f(x_{99})+f(x_{100})$.

▷ **6 (10 баллов).** Вычислить значение выражения

$$Y=\frac{30\cdot 41^9}{40(41^8+41^7+41^6+\ldots+41^3+41^2+42)+1}.$$

▷ **7 (10 баллов).** Найти сумму первых десяти членов возрастающей геометрической прогрессии, если сумма и произведение первых трёх её членов соответственно равны 26 и 216.

▷ **8 (10 баллов).** При делении натурального числа на 4, 5 и 6 в остатке остаётся единица, а при делении на 7 оно делится нацело. Найти это число, если известно, что это число меньшее 500.

▷ **9 (10 баллов).** Найти наименьшее значение дроби $\dfrac{\frac{3}{2}x^2+10x+6}{x}$ при $x>0$.

▷ **10 (10 баллов).** При каком значении параметра m один корень уравнения больше другого в два раза $(x^2-m^2)^2-4mx-1=0$.

ЖЕЛАЕМ УСПЕХА!!!

XXXIII Межрегиональная олимпиада школьников по математике «САММАТ-2025»

Заключительный тур

9 февраля 2025 года

9 класс

▷ **1 (10 баллов).** Найти все трёхзначные числа, у которых числа сотен, десятков и единиц не являются нечётными, и известно, что сумма квадратов чисел сотен и десятков не превосходит числа сотен, умноженного на 4, а квадрат числа единиц превосходит квадрат суммы чисел сотен и десятков более чем на 40.

▷ **2 (10 баллов).** Решить систему уравнений: $\begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{x+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{y+3}}=\dfrac{5}{6}; \\ \dfrac{1}{\sqrt{x+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{11-z}}=\dfrac{5}{6}; \\ \dfrac{1}{\sqrt{y+3}}+\dfrac{1}{\sqrt{11-z}}=\dfrac{2}{3}. \end{cases}$

▷ **3 (10 баллов).** Четыре последовательных члена геометрической прогрессии a_3, a_4, a_5, a_6 удовлетворяют условиям: $\begin{cases} a_3+a_4+a_5-a_6=-12; \\ a_3+a_4+a_6-a_5=84; \\ a_3+a_5+a_6-a_4=132; \\ a_4+a_5+a_6-a_3=156. \end{cases}$
Найти сумму первых восьми членов этой прогрессии.

▷ **4 (10 баллов).** Решить в натуральных x и y следующее уравнение: $\sqrt{-2x^2+21x-10}+\sqrt{-y^2-2y+24}=7$.

▷ **5 (10 баллов).** Задана функция $f(x)=2x+5$. Аргумент x образует арифметическую прогрессию $\{x_n\}$, $n=\overline{1,100}$, с первым членом $x_1=1$ и суммой первых ста членов, равной 10000. Вычислить $f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)+\ldots+f(x_{99})+f(x_{100})$.

▷ **6 (10 баллов).** Вычислить значение выражения

$$Y=\frac{30\cdot 41^9}{40(41^8+41^7+41^6+\ldots+41^3+41^2+42)+1}.$$

▷ **7 (10 баллов).** Найти сумму первых десяти членов возрастающей геометрической прогрессии, если сумма и произведение первых трёх её членов соответственно равны 26 и 216.

▷ **8 (10 баллов).** При делении натурального числа на 4, 5 и 6 в остатке остаётся единица, а при делении на 7 оно делится нацело. Найти это число, если известно, что это число меньшее 500.

▷ **9 (10 баллов).** Найти наименьшее значение дроби $\dfrac{\frac{3}{2}x^2+10x+6}{x}$ при $x>0$.

▷ **10 (10 баллов).** При каком значении параметра m один корень уравнения больше другого в два раза $(x^2-m^2)^2-4mx-1=0$.

ЖЕЛАЕМ УСПЕХА!!!

XXXIII Межрегиональная олимпиада школьников по математике «САММАТ-2025»

Заключительный тур

9 февраля 2025 года

10 класс

▷ **1 (10 баллов).** Найти решение в целых числах x и y следующего уравнения
$$\sqrt{5x^2+7x+3}+\sqrt{7y^2-3y+1}=19.$$

▷ **2 (10 баллов).** В шкатулке лежат 25 пуговиц серого и черного цветов. Сколько пуговиц одного и другого вида находятся в шкатулке, если вероятность вытащить наудачу две пуговицы одного цвета равна $1/2$.

▷ **3 (10 баллов).** В декартовой системе координат задана прямая $x=-15$ и точка $A(15,0)$. Точка, совмещённая с началом координат,начинает движение в первом квадранте при $x\to+\infty$ и $y\to+\infty$ таким образом, что расстояния от неё до прямой $x=-15$ и до точки A равны. Найти координаты точки N, принадлежащей траектории, описываемой этой точкой, такой, что расстояние от неё до начала координат равно $\sqrt{781}$.

▷ **4 (10 баллов).** Найдите все корни уравнения $(x-a)(x-b)=(x-c)(x-d)$, если известно, что $a+d=b+c=2025$ и $a\neq c$.

▷ **5 (10 баллов).** Найдите все возможные способы представить число 2025 в виде суммы последовательных натуральных чисел.

▷ **6 (10 баллов).** Шар вписан в прямую призму, в основании которой лежит прямоугольный треугольник. В этом треугольнике перпендикуляр длины h, опущенный из вершины прямого угла на гипотенузу, составляет с одним из катетов угол α. Найти объём призмы.

▷ **7 (10 баллов).** Найти решение уравнения
$$\frac{\cos x+\cos^2 x-\sin^2 x}{1+\cos x+\cos 2x+\cos 3x}=\frac{1}{2}.$$

▷ **8 (10 баллов).** Найдите значение $f(3)$, если для любого $x\neq 0$ выполняется равенство $f(x)+2f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{x+2}{x+1}$.

▷ **9 (10 баллов).** Решить уравнение $f(g(x))=g(f(x))$, где $f(x)=5x$, $g(x)=5^x$.

▷ **10 (10 баллов).** По двум шоссейным дорогам, пересекающимся под углом 60°, в направлении перекрёстка движутся велосипедист и мотоциклист со скоростями 20 км/час и 45 км/час, соответственно, так, что угол между векторами их скоростей составляет 60°. В начальный момент времени велосипедист находился на расстоянии 20 км, а мотоциклист на расстоянии 30 км от перекрёстка. Найти минимальное расстояние между велосипедистом и мотоциклистом в процессе движения и их положение в этот момент времени по отношению к перекрёстку.

ЖЕЛАЕМ УСПЕХА!!!

XXXIII Межрегиональная олимпиада школьников по математике «САММАТ-2025»

Заключительный тур

9 февраля 2025 года

10 класс

▷ **1 (10 баллов).** Найти решение в целых числах x и y следующего уравнения
$$\sqrt{5x^2+7x+3}+\sqrt{7y^2-3y+1}=19.$$

▷ **2 (10 баллов).** В шкатулке лежат 25 пуговиц серого и черного цветов. Сколько пуговиц одного и другого вида находятся в шкатулке, если вероятность вытащить наудачу две пуговицы одного цвета равна $1/2$.

▷ **3 (10 баллов).** В декартовой системе координат задана прямая $x=-15$ и точка $A(15,0)$. Точка, совмещённая с началом координат,начинает движение в первом квадранте при $x\to+\infty$ и $y\to+\infty$ таким образом, что расстояния от неё до прямой $x=-15$ и до точки A равны. Найти координаты точки N, принадлежащей траектории, описываемой этой точкой, такой, что расстояние от неё до начала координат равно $\sqrt{781}$.

▷ **4 (10 баллов).** Найдите все корни уравнения $(x-a)(x-b)=(x-c)(x-d)$, если известно, что $a+d=b+c=2025$ и $a\neq c$.

▷ **5 (10 баллов).** Найдите все возможные способы представить число 2025 в виде суммы последовательных натуральных чисел.

▷ **6 (10 баллов).** Шар вписан в прямую призму, в основании которой лежит прямоугольный треугольник. В этом треугольнике перпендикуляр длины h, опущенный из вершины прямого угла на гипотенузу, составляет с одним из катетов угол α. Найти объём призмы.

▷ **7 (10 баллов).** Найти решение уравнения
$$\frac{\cos x+\cos^2 x-\sin^2 x}{1+\cos x+\cos 2x+\cos 3x}=\frac{1}{2}.$$

▷ **8 (10 баллов).** Найдите значение $f(3)$, если для любого $x\neq 0$ выполняется равенство $f(x)+2f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{x+2}{x+1}$.

▷ **9 (10 баллов).** Решить уравнение $f(g(x))=g(f(x))$, где $f(x)=5x$, $g(x)=5^x$.

▷ **10 (10 баллов).** По двум шоссейным дорогам, пересекающимся под углом 60°, в направлении перекрёстка движутся велосипедист и мотоциклист со скоростями 20 км/час и 45 км/час, соответственно, так, что угол между векторами их скоростей составляет 60°. В начальный момент времени велосипедист находился на расстоянии 20 км, а мотоциклист на расстоянии 30 км от перекрёстка. Найти минимальное расстояние между велосипедистом и мотоциклистом в процессе движения и их положение в этот момент времени по отношению к перекрёстку.

ЖЕЛАЕМ УСПЕХА!!!

XXXIII Межрегиональная олимпиада школьников по математике «САММАТ-2025»

Заключительный тур

9 февраля 2025 года

11 класс

▷ **1 (10 баллов).** Восемь одинаковых карандашей стоят 82 рубля с копейками, а 13 карандашей стоят 134 рубля с копейками. Определить точную стоимость карандаша, если известно, что в обоих случаях была заплачена минимальная сумма из всех возможных.

▷ **2 (10 баллов).** Решить уравнение $x^{\log_{x^3}(x^3+19)} = 3$.

▷ **3 (10 баллов).** Пусть n — положительное целое число. Определим функцию $f(n)$ как количество способов представить n в виде суммы квадратов двух целых чисел (где порядок слагаемых важен, т.е. 1^2+2^2 и 2^2+1^2 считаются разными представлениями). Докажите, что для любого положительного целого числа m существует такое положительное целое число n, что $f(n) > m$.

▷ **4 (10 баллов).** Сколько решений имеет система уравнений
$$\begin{cases} y^2 + x^2 - 2y + 4x - 20 = 0; \\ x^2 + 3x - y - 3 = 0. \end{cases}$$

▷ **5 (10 баллов).** Вычислить $\arccos(\cos(2\operatorname{arctg}(\sqrt{2}-1)))$.

▷ **6 (10 баллов).** Сторона основания правильной четырёхугольной пирамиды равна a, высота пирамиды равна h. Через сторону основания пирамиды и середину скрещивающегося с ней бокового ребра проведено сечение. Определить расстояние от вершины пирамиды до плоскости этого сечения.

▷ **7 (10 баллов).** Концы отрезка AB длиной 20 могут перемещаться (скользить) вдоль осей OX и OY декартовой системы координат, т.е. конец отрезка A может двигаться вдоль оси OY, а конец B — вдоль оси OX. Точка M — середина отрезка. В начальном положении отрезок находится на оси OX, далее точка B перемещается в отрицательном направлении оси OX, а точка A — в положительном направлении оси OY до состояния, в котором отрезок станет принадлежать оси OY. На плоскости задана точка $D(15\sqrt{3}; 15)$. Найти на кривой, которую описывает точка M при движении отрезка, координаты такой точки N, что расстояние $|ND|$ от точки D до кривой будет минимальным из всех возможных. В ответе записать координаты точки N и значение минимального расстояния $|ND|$.

▷ **8 (10 баллов).** Решить уравнение $A_x^3 C_x^{x-2} = 14x$, где $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$, $C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!}$, $n, k \in \mathbb{N}$.

▷ **9 (10 баллов).** В шкатулке лежат k пуговиц серого и черного цветов. Известно, что вероятность вытащить наудачу две пуговицы одного цвета равна 1/2. Сколько пуговиц одного и другого вида находятся в шкатулке? Сколько решений имеет эта задача, если $k \in [10, 100]$?

▷ **10 (10 баллов).** При каких значениях параметра a функция $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - (a+1)x^2 + (a^2+2a-15)x - 10$ имеет экстремальные точки $x \in [-1; 8]$?

ЖЕЛАЕМ УСПЕХА!!!

XXXIII Межрегиональная олимпиада школьников по математике «САММАТ-2025»

Заключительный тур

9 февраля 2025 года

11 класс

▷ **1 (10 баллов).** Восемь одинаковых карандашей стоят 82 рубля с копейками, а 13 карандашей стоят 134 рубля с копейками. Определить точную стоимость карандаша, если известно, что в обоих случаях была заплачена минимальная сумма из всех возможных.

▷ **2 (10 баллов).** Решить уравнение $x^{\log_{x^3}(x^3+19)} = 3$.

▷ **3 (10 баллов).** Пусть n — положительное целое число. Определим функцию $f(n)$ как количество способов представить n в виде суммы квадратов двух целых чисел (где порядок слагаемых важен, т.е. 1^2+2^2 и 2^2+1^2 считаются разными представлениями). Докажите, что для любого положительного целого числа m существует такое положительное целое число n, что $f(n) > m$.

▷ **4 (10 баллов).** Сколько решений имеет система уравнений
$$\begin{cases} y^2 + x^2 - 2y + 4x - 20 = 0; \\ x^2 + 3x - y - 3 = 0. \end{cases}$$

▷ **5 (10 баллов).** Вычислить $\arccos(\cos(2\operatorname{arctg}(\sqrt{2}-1)))$.

▷ **6 (10 баллов).** Сторона основания правильной четырёхугольной пирамиды равна a, высота пирамиды равна h. Через сторону основания пирамиды и середину скрещивающегося с ней бокового ребра проведено сечение. Определить расстояние от вершины пирамиды до плоскости этого сечения.

▷ **7 (10 баллов).** Концы отрезка AB длиной 20 могут перемещаться (скользить) вдоль осей OX и OY декартовой системы координат, т.е. конец отрезка A может двигаться вдоль оси OY, а конец B — вдоль оси OX. Точка M — середина отрезка. В начальном положении отрезок находится на оси OX, далее точка B перемещается в отрицательном направлении оси OX, а точка A — в положительном направлении оси OY до состояния, в котором отрезок станет принадлежать оси OY. На плоскости задана точка $D(15\sqrt{3}; 15)$. Найти на кривой, которую описывает точка M при движении отрезка, координаты такой точки N, что расстояние $|ND|$ от точки D до кривой будет минимальным из всех возможных. В ответе записать координаты точки N и значение минимального расстояния $|ND|$.

▷ **8 (10 баллов).** Решить уравнение $A_x^3 C_x^{x-2} = 14x$, где $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$, $C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!}$, $n, k \in \mathbb{N}$.

▷ **9 (10 баллов).** В шкатулке лежат k пуговиц серого и черного цветов. Известно, что вероятность вытащить наудачу две пуговицы одного цвета равна 1/2. Сколько пуговиц одного и другого вида находятся в шкатулке? Сколько решений имеет эта задача, если $k \in [10, 100]$?

▷ **10 (10 баллов).** При каких значениях параметра a функция $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - (a+1)x^2 + (a^2+2a-15)x - 10$ имеет экстремальные точки $x \in [-1; 8]$?

ЖЕЛАЕМ УСПЕХА!!!