

САММАТ-2026
1 марта 2026 г.
Решение задач 10 класса

Задача №1. Решить неравенство:

$$81 - 3x^3 \geq 3^{x+3} - x^3 \cdot 3^x.$$

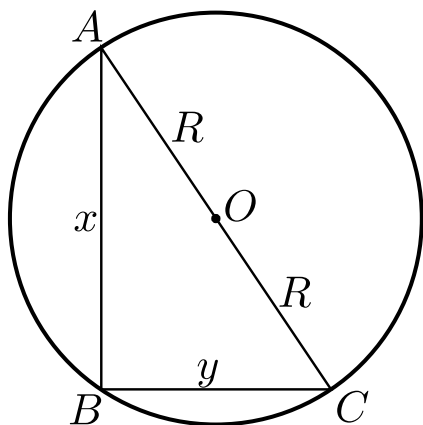
Решение. $3(27 - x^3) \geq 3^x(27 - x^3) \Rightarrow (3^x - 3)(27 - x^3) \leq 0$. Неравенство сводится к решению двух систем неравенств.

$$\text{I. } \begin{cases} 27 - x^3 \geq 0 \\ 3^x - 3 \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq 3 \\ x \leq 1 \end{cases} \Rightarrow x \leq 1.$$

$$\text{II. } \begin{cases} 27 - x^3 \leq 0 \\ 3^x - 3 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ x \geq 1 \end{cases} \Rightarrow x \geq 3.$$

Ответ: $x \in (-\infty; 1] \cup [3; +\infty)$.

Задача №2. Радиус описанной около прямоугольного треугольника площади S окружности равен R . Найти катеты.



Решение. Обозначим x и y катеты треугольника, тогда имеем систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4R^2 \\ xy = 2S \end{cases} \Rightarrow (x + y)^2 = 4(R^2 + S) \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x + y = 2\sqrt{R^2 + S} \\ xy = 2S \end{cases} \Rightarrow x = 2\sqrt{R^2 + S} - y \Rightarrow$$

$$y(2\sqrt{R^2 + S} - y) = 2S \Rightarrow y^2 - 2\sqrt{R^2 + S}y + 2S = 0$$

$$\Rightarrow y_{1,2} = \sqrt{R^2 + S} \pm \sqrt{(R^2 + S) - 2S} =$$

$$= \sqrt{R^2 + S} \pm \sqrt{R^2 - S} \Rightarrow$$

$$y_1 = \sqrt{R^2 + S} + \sqrt{R^2 - S}, y_2 = \sqrt{R^2 + S} - \sqrt{R^2 - S}$$

$$\Rightarrow x_1 = 2\sqrt{R^2 + S} - \sqrt{R^2 + S} - \sqrt{R^2 - S} =$$

$$= \sqrt{R^2 + S} - \sqrt{R^2 - S},$$

$$x_2 = 2\sqrt{R^2 + S} - \sqrt{R^2 + S} + \sqrt{R^2 - S} =$$

$$= \sqrt{R^2 + S} + \sqrt{R^2 - S}.$$

Поскольку x и y входят симметричным образом, то катеты равны $\sqrt{R^2 + S} + \sqrt{R^2 - S}$ и $\sqrt{R^2 + S} - \sqrt{R^2 - S} > 0$.

Ответ: $\sqrt{R^2 + S} + \sqrt{R^2 - S}$ и $\sqrt{R^2 + S} - \sqrt{R^2 - S}$.

Задача №3. Решить уравнение:

$$\sqrt[3]{(35 + x)^2} + 2\sqrt[3]{(35 - x)^2} - 3\sqrt[3]{35^2 - x^2} = 0.$$

Решение. Так как $\sqrt[3]{35^2 - x^2} \neq 0$ (следует из уравнения), то разделим на $\sqrt[3]{(35 + x)(35 - x)}$, получим

$$\sqrt[3]{\frac{35 + x}{35 - x}} + 2\sqrt[3]{\frac{35 - x}{35 + x}} - 3 = 0.$$

Замена $t = \sqrt[3]{\frac{35+x}{35-x}} \Rightarrow$

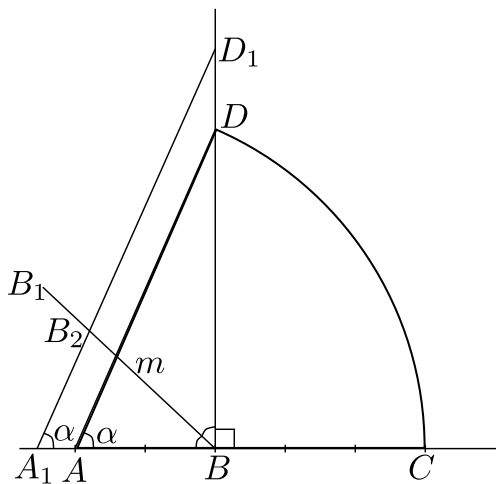
$$t + \frac{2}{t} - 3 = 0 \Rightarrow t^2 - 3t + 2 = 0 \Rightarrow t_1 = 2, t_2 = 1$$

$$\sqrt[3]{\frac{35+x}{35-x}} = 1 \Rightarrow x = 0$$

$$\sqrt[3]{\frac{35+x}{35-x}} = 2 \Rightarrow \frac{35+x}{35-x} = 8 \Rightarrow 35+x = 8(35-x) \Rightarrow 9x = 245 \Rightarrow x = \frac{245}{9}.$$

Ответ: $x = 0$; $x = \frac{245}{9} = 27\frac{2}{9}$.

Задача №4. При помощи циркуля и линейки построить прямоугольный треугольник, если известно, что косинус острого угла равен $\frac{2}{5}$, а длина биссектрисы, проведенной из вершины прямого угла, имеет заданную длину m . Каждый этап построения подробно описать.



Решение. 1) из точки A проводим прямую и циркулем откладываем 2 и 5 длин произвольного отрезка (можно m);

2) из точки B восстанавливаем перпендикуляр к прямой AC , $AB = 2$, $AC = 5$;

3) проводим окружность радиуса $R = AC$ и находим точку D на перпендикуляре из точки B , $AD = 5$, тогда $\cos \angle DAB = \frac{2}{5}$;

4) строим биссектрису прямого угла (линия BB_1);

5) на линии BB_1 из точки B откладываем отрезок m (точка B_2);

6) через точку B_2 проводим прямую, параллельную AD , тогда $\triangle A_1D_1B$ — искомый треугольник.

Задача №5. Обозначим через p трехзначное число, оканчивающееся цифрой 5, а через q — число, полученное из p перестановкой цифры 5 на первое место. Разность $p - q$ равна трехзначному положительному числу, состоящему из одинаковых цифр. Найти такое число.

Решение. Исходное число $\overline{ab5}$, число $q = \overline{5ab}$, тогда

$$p - q = 100a + 10b + 5 - 500 - 10a - b = \overline{ccc} = 100c + 10c + c$$

$$9(10a + b) = 111c + 495 \Rightarrow 10a + b = \frac{111c + 495}{9} \leq 99$$

Перебирая значения $c = \{1, 2, 3, \dots\}$, получим, что $10a + b = 92$ при $c = 3 \Rightarrow a = 9$, $b = 2$. Искомое число 925.

Ответ: 925.

Задача №6. Решить уравнение:

$$2 \cos^2 \frac{x}{2} - 1 = \cos 2x.$$

Решение. Применяя формулу косинуса двойного угла

$$\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1$$

к обеим частям исходного уравнения, получим

$$\cos x = 2 \cos^2 x - 1$$

или

$$2 \cos^2 x - \cos x - 1 = 0.$$

Поскольку квадратное уравнение $2z^2 - z - 1 = 0$ имеет корни $z_1 = 1$ и $z_2 = -\frac{1}{2}$, то исходное уравнение равносильно совокупности уравнений

$$\cos x = 1 \text{ или } \cos x = -\frac{1}{2}.$$

Первое из этих уравнений имеет решения $x = 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$. Решения второго уравнения есть $x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi l, l \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $x = 2\pi k, x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi l, k \in \mathbb{Z}, l \in \mathbb{Z}$.

Задача №7. Решить уравнение:

$$4x - 3y + 3 - 4\sqrt{4x^2 + y^2 + 3} = 0.$$

Решение. Используем векторную алгебру: введем векторы $\vec{a}(2x, y, \sqrt{3})$ и $\vec{b}(2, -3, \sqrt{3})$. Тогда $|\vec{a}| = \sqrt{4x^2 + y^2 + 3}$; $|\vec{b}| = \sqrt{4 + 9 + 3} = \sqrt{16} = 4$. Скалярное произведение $\vec{a} \cdot \vec{b} = 4x - 3y + 3 = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \alpha$.

Переписывая исходное уравнение в виде

$$4x - 3y + 3 = 4\sqrt{4x^2 + y^2 + 3},$$

видим, что левая часть — это $\vec{a} \cdot \vec{b}$, а правая — $|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$, т.е. $\cos \alpha = 1 \Rightarrow \alpha = 0$; $\vec{a} \parallel \vec{b}$. Тогда существует λ такая, что $\vec{a} = \lambda \vec{b} \Rightarrow$

$$\frac{2x}{2} = \frac{y}{-3} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 1 = \lambda \Rightarrow \begin{cases} 2x = 2 \\ y = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -3 \end{cases}$$

Ответ: $x = 1, y = -3$.

Задача №8. Найти все значения параметра a , при каждом из которых все решения уравнения

$$2|x - a| + a - 4 + x = 0$$

принадлежат отрезку $x \in [0, 4]$.

Решение. Найдем сначала при каждом значении a все решения исходного уравнения. Будем искать решения сначала в области $x < a$, а потом в области $x \geq a$.

На множестве $x < a$ справедливо равенство $|x - a| = a - x$, и поэтому исходное уравнение можно переписать в виде

$$2(a - x) + a - 4 + x = 0,$$

откуда $x = 3a - 4$. Число $x = 3a - 4$ лежит в области $x < a$ тогда и только тогда, когда выполняется неравенство $3a - 4 < a$, т.е. если $a < 2$.

На множестве $x \geq a$ справедливо равенство $|x - a| = x - a$, и поэтому исходное уравнение можно переписать в виде

$$2(x - a) + a - 4 + x = 0,$$

откуда $x = \frac{a + 4}{3}$. Число $x = \frac{a + 4}{3}$ лежит в области $x \geq a$ тогда и только тогда, когда выполняется неравенство $\frac{a + 4}{3} \geq a$, т.е. если $a \leq 2$.

Итак, при $a < 2$ исходное уравнение имеет два решения $x_1 = 3a - 4$ и $x_2 = \frac{a + 4}{3}$, при $a = 2$ — единственное решение $x = 2$ и при $a > 2$ решений не имеет.

Найдем теперь все значения $a < 2$, такие что $3a - 4$ и $\frac{a + 4}{3}$ удовлетворяют условиям $0 \leq 3a - 4 \leq 4$ и $0 \leq \frac{a + 4}{3} \leq 4$.

Решая неравенство $0 \leq 3a - 4 \leq 4$, находим, что $\frac{4}{3} \leq a \leq \frac{8}{3}$, решая второе неравенство $0 \leq \frac{a + 4}{3} \leq 4$, находим, что $-4 \leq a \leq 8$.

Следовательно, при $\frac{4}{3} \leq a < 2$ оба корня исходного уравнения $x_1 = 3a - 4$ и $x_2 = \frac{a + 4}{3}$ принадлежат отрезку $[0; 4]$. При $a = 2$ корень $x = 2$ также принадлежит отрезку $[0; 4]$.

Итак, условию задачи удовлетворяют все значения a из промежутка $\left[\frac{4}{3}; 2\right]$.

Ответ: $\frac{4}{3} \leq a \leq 2$.

Задача №9. Решить неравенство:

$$\sqrt{2 \cos^2 x + \cos x - 3} - \sqrt{-3 \cos^2 x + 4 \cos x - 1} \leq \frac{1}{2}.$$

Решение. Обозначим $\cos x = z$, тогда

$$\sqrt{2z^2 + z - 3} - \sqrt{-3z^2 + 4z - 1} \leq \frac{1}{2}.$$

ОДЗ: для первого корня: $2z^2 + z - 3 \geq 0 \Rightarrow z_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4 \cdot 2 \cdot 3}}{4} = \frac{-1 \pm 5}{4}$
 $\Rightarrow z_1 = -\frac{3}{2}, z_2 = 1 \Rightarrow x \in \left(-\infty; -\frac{3}{2}\right] \cup [1; +\infty)$.

Для второго корня: $-3z^2 + 4z - 1 \geq 0 \Rightarrow 3z^2 - 4z + 1 = 0 \Rightarrow z_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot 3}}{6} = \frac{4 \pm 2}{6} \Rightarrow z_1 = \frac{1}{2}, z_2 = 1 \Rightarrow x \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$.

Единственная общая точка $z = 1$, здесь левая часть равна 0 и неравенство удовлетворяется.

Имеем: $\cos x = 1 \Rightarrow x = 2\pi n \ (n \in \mathbb{Z})$.

Ответ: $x = 2\pi n \ (n \in \mathbb{Z})$.

Задача №10. Сумма первых пяти членов арифметической прогрессии на 100 меньше суммы ее следующих пяти членов. На сколько восьмой член прогрессии больше ее третьего члена.

Решение.

$$S_5 = \frac{2a_1 + 4d}{2} \cdot 5 = 5a_1 + 10d,$$

$$S_{6-10} = \frac{(a_1 + 5d) + (a_1 + 9d)}{2} \cdot 5 = \frac{2a_1 + 14d}{2} \cdot 5 = 5a_1 + 35d.$$

$$(5a_1 + 35d) - (5a_1 + 10d) = 100 \Rightarrow 25d = 100 \Rightarrow d = 4;$$

$$a_3 = a_1 + 2d = a_1 + 8, \quad a_8 = a_1 + 7d = a_1 + 28,$$

$$a_8 - a_3 = 20.$$

Ответ: 20.