САММАТ-2026
1 марта 2026 г.
Решение задач 11 класса

Задача №1. Решить уравнение:

$$x\log_2(x^2)+1=2x+2\log_4 x.$$

Решение. ОДЗ: $x>0$. $\log_4 x=\dfrac{1}{2}\log_2 x$. Тогда

$$2x\log_2 x+1=2x+\log_2 x \;\Rightarrow\; 2x\log_2 x-\log_2 x=2x-1 \;\Rightarrow$$
$$\log_2 x(2x-1)-(2x-1)=0 \;\Rightarrow\; (2x-1)(\log_2 x-1)=0 \;\Rightarrow$$
$$2x-1=0 \;\Rightarrow\; x_1=\frac{1}{2}\in \text{ОДЗ}$$
$$\log_2 x-1=0 \;\Rightarrow\; x_2=2^1=2\in \text{ОДЗ}$$

Ответ: $x_1=\dfrac{1}{2}$, $x_2=2$.

Задача №2. Решить уравнение:

$$2\operatorname{tg} x+\frac{\cos x}{2(1-\sin x)}=0.$$

Решение. ОДЗ: для $\operatorname{tg} x$: $x\neq\dfrac{\pi}{2}+\pi k$ $(k\in\mathbb{Z})$; $\sin x\neq 1$: $x\neq\dfrac{\pi}{2}+2\pi n$ $(n\in\mathbb{Z})$. Второе — следствие первого при $k=2n$.

$$4\frac{\sin x}{\cos x}+\frac{\cos x}{1-\sin x}=0 \;\Rightarrow\; 4\sin x(1-\sin x)+\cos^2 x=0 \;\Rightarrow$$
$$4\sin x(1-\sin x)+1-\sin^2 x=0 \;\Rightarrow\; 5\sin^2 x-4\sin x-1=0 \;\Rightarrow$$
$$y=\sin x \;\Rightarrow\; 5y^2-4y-1=0 \;\Rightarrow\; y_{1,2}=\frac{4\pm\sqrt{16+20}}{10}=\frac{4\pm 6}{10} \;\Rightarrow\; y_1=1,\; y_2=-\frac{1}{5}$$

Имеем 2 уравнения: $\sin x=1$ (не входит в ОДЗ);
$\sin x=-\dfrac{1}{5}$, $x=(-1)^n\arcsin\left(-\dfrac{1}{5}\right)+\pi n$ $(n\in\mathbb{Z})$.

Ответ: $x=(-1)^n\arcsin\left(-\dfrac{1}{5}\right)+\pi n$ $(n\in\mathbb{Z})$.

Задача №3. Решить уравнение:

$$\sqrt{3-x}-x\sqrt{1+x}=2\sqrt{x^2+1}.$$

Решение. Введем векторы: $\overline{a}(\sqrt{3-x},\sqrt{1+x})$, $\overline{b}(1,-x)$ $(-1\le x\le 3)$. Тогда $|\overline{a}|=\sqrt{3-x+1+x}=2$, $|\overline{b}|=\sqrt{1+x^2}$.

Слева — $\overline{a}\cdot\overline{b}$, справа — $|\overline{a}|\cdot|\overline{b}|$, $\overline{a}\cdot\overline{b}=|\overline{a}||\overline{b}|\cos\alpha$, значит $\cos\alpha=1\Rightarrow\alpha=0\Rightarrow\overline{a}\parallel\overline{b}\Rightarrow$ $\dfrac{\sqrt{3-x}}{1}=\dfrac{\sqrt{1+x}}{-x}\Rightarrow x<0$. Возведем в квадрат $3-x=\dfrac{1+x}{x^2}\Rightarrow x^3-3x^2+x+1=0\Rightarrow$

$x = 1$ — один из корней уравнения (но он не подходит, $x < 0$). $(x-1)(x^2-2x-1) = 0$ $\Rightarrow x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1+1} = 1 \pm \sqrt{2}$. Подходит лишь $1 - \sqrt{2} < 0$.

Ответ: $1 - \sqrt{2}$.

Задача №4. Задана арифметическая прогрессия $1 + 2 + 3 + \ldots + (n-1) + n$. Сколько членов этой прогрессии нужно сложить, чтобы получить трехзначное число, записанное одинаковыми цифрами? Найти это число.

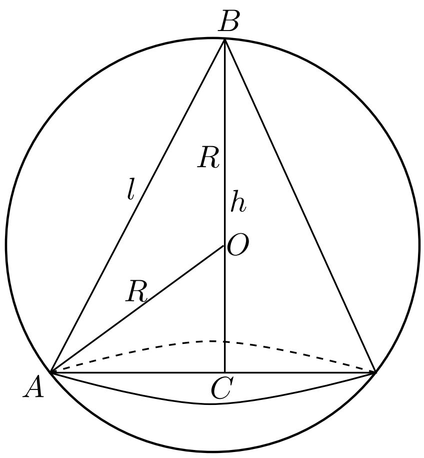
Решение. $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \overline{aaa}$. Тогда $S_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$, имеем

$$\frac{n(n+1)}{2} = 100a + 10a + a = 111a \;\Rightarrow\; n(n+1) = 222a = 2 \cdot 3 \cdot 37a,$$

где $n < 45$ ($111a < 1000$, $222a < 2000$, $n < 45$). Так как в левой части равенства произведение двух последовательных натуральных чисел, то и в правой части равенства должно быть произведение двух последовательных натуральных чисел. Одно из них простое (37), а другое кратно 6, следовательно оно равно 36. Имеем $n(n+1) = 36 \cdot 37$ $\Rightarrow n = 36$. Число: $S_{36} = \dfrac{36 \cdot 37}{2} = 666$.

Ответ: 666.

Задача №5. В прямом круговом конусе разность длин образующей и высоты равна 1. Найти минимальное из возможных значений радиусов шара, описанного вокруг конуса.



Решение. O — центр шара. $AB = l$, $BC = h$, $OB = AO = R$, $OC = h - R$, $l - h = 1$.

Из $\triangle ABC$ имеем $AC^2 = l^2 - h^2$. Из $\triangle AOC$ имеем $AC^2 = R^2 - (h-R)^2$, значит $R^2 - (h-R)^2 = l^2 - h^2$ $\Rightarrow R^2 - h^2 + 2hR - R^2 = l^2 - h^2 \Rightarrow l^2 = 2Rh \Rightarrow$ $(1+h)^2 = 2Rh \Rightarrow R = \dfrac{(h+1)^2}{2h} = \dfrac{h}{2} + 1 + \dfrac{1}{2h}$.

Отсюда видно, что функция $R(h) \to \infty$ при $h \to 0$ или $h \to \infty$. А так как эта функция на интервале $(0; \infty)$ непрерывна, то внутри интервала должна существовать точка, в которой производная $R'(h) = 0$, а радиус должен принимать наименьшее значение.

$$R'(h) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2h^2}; \;\Rightarrow\; \frac{h^2-1}{2h^2} = 0 \;\Rightarrow\; h = 1.$$

В этом случае радиус шара будет равен

$$R = \frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{2} = 2.$$

Ответ: $R = 2$.

Задача №6. Русла двух рек (в пределах некоторой области) приближенно представляют параболу $y = x^2$ и прямую $x - y - 2 = 0$. Требуется соединить данные реки прямолинейным каналом наименьшей длины. Через какие точки его провести?

Решение. Пусть канал соединяет точки A и B, тогда касательная к параболе в точке A, параллельная прямой. Поэтому угловой коэффициент касательной равен 1. Находим

$$y' = 2x, \quad 2x_A = 1 \Rightarrow x_A = \frac{1}{2},\ y_A = \frac{1}{4}.$$

Угловой коэффициент прямой AB равен -1, составляем уравнение AB: $x+y-\frac{3}{4} = 0$. Решив систему

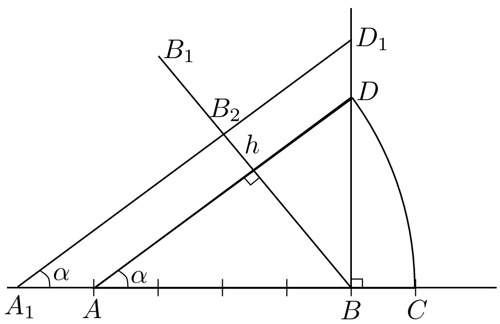
$$\begin{cases} x - y - 2 = 0; \\ x + y - \frac{3}{4} = 0, \end{cases}$$

находим координаты точки $B\left(\frac{11}{8}; -\frac{5}{8}\right)$.

Ответ: $A\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{4}\right)$, $B\left(\frac{11}{8}; -\frac{5}{8}\right)$.

Задача №7. При помощи циркуля и линейки построить прямоугольный треугольник, если известно, что синус острого угла равен $\frac{3}{5}$, а длина высоты, проведенной из вершины прямого угла, имеет заданную длину h. Каждый этап построения подробно описать.

Решение. $\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha} = \sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2} = \frac{4}{5}$.



1) из точки A проводим прямую и циркулем откладываем 4 (точка B) и 5 (точка C) отрезков одинаковой длины;

2) из точки B восстаавливаем перпендикуляр к прямой AC;

3) строим окружность с центром в точке A радиусом $AC = 5$, тогда $AD = 5$ и $\cos\alpha = \frac{AB}{AD} = \frac{4}{5}$;

4) проводим высоту B_1B, опуская перпендикуляр из точки B на прямую AD;

5) откладываем на прямой B_1B отрезок h, получаем точку B_2;

6) проводим прямую через точку B_2, параллельную AD, получаем искомый $\triangle A_1D_1B$.

Задача №8. Число двухкомнатных квартир в доме в четыре раза больше числа однокомнатных, а число трехкомнатных квартир кратно числу однокомнатных. Если число трехкомнатных квартир увеличить в пять раз, то их станет на 22 больше, чем двухкомнатных. Сколько всего квартир в доме, если известно, что их не меньше 100?

Решение. Пусть n — общее число вартир, $n \geq 100$ (по условию). Пусть x — количество двухкомнатных квартир, y — однокомнатных, z — трехкомнатных. Тогда $x = 4y$, $z = my$, (m — натуральное), $5z = x + 22$. Тогда имеем $x + y + z \geq 100 \Rightarrow 4y + y + my \geq 100 \Rightarrow y(5+m) \geq 100$. Далее имеем $\begin{cases} x + 22 = 5z; \\ x = 4y, \end{cases}$ т.е. число $x + 22$

кратно 5, а x кратно 4.

Составим таблицу для величин z, $x = 5z - 22$ и $y = \dfrac{x}{4}$.

z	6	10	14	18	22	26
x	8	28	48	68	88	108
y	2	7	12	17	22	27

Величина $m = \dfrac{z}{y}$ должна быть натуральной величиной и она уменьшается от $m = 3$ до $m = 1$ и далее m становится меньше единицы. Из таблицы следует, что всем условиям удовлетворят данные предпоследнего столбца $z = 22$, $x = 88$, $y = 22$ $\Rightarrow n = 22 + 88 + 22 = 132 > 100$.

Ответ: 132.

Задача №9. Найти наименьшее натуральное число, удовлетворяющее неравенству $2\Box 4 < 3\Box x$, если операция $\Box$ задана соотношением

$$a\Box b = a + b + b^2.$$

Решение.

$$2 + 4 + 16 < 3 + x + x^2 \;\Rightarrow\; x^2 + x - 19 > 0 \;\Rightarrow$$
$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4 \cdot 19}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{77}}{2} \;\Rightarrow$$
$$x \in \Big(-\infty; \frac{-1 - \sqrt{77}}{2}\Big) \cup \Big(\frac{-1 + \sqrt{77}}{2}; +\infty\Big).$$

Наименьшее натуральное число — 4.

Ответ: 4.

Задача №10. Найти все значения x и y, удовлетворяющие неравенству:

$$\sqrt{-36\cos^2 x + 12x - 1} + \frac{x}{y^2 + 1}\sqrt{-64\sin^2 y + 16\sin y - 1} \le \sqrt{2}.$$

Решение. ОДЗ: для первого корня — $\cos x = z \Rightarrow -36z^2 + 12z - 1 = -(6z-1)^2 \ge 0$, удовлетворяет только $z = \dfrac{1}{6}$; для второго корня — $\sin y = u \Rightarrow -64u^2 + 16u - 1 = -(8u-1)^2 \ge 0$, удовлетворяет только $u = \dfrac{1}{8}$.

Таким образом

$$\cos x = \frac{1}{6} \;\Rightarrow\; x = \pm\arccos\left(\frac{1}{6}\right) + 2\pi n,\; n \in \mathbb{Z};$$
$$\sin y = \frac{1}{8} \;\Rightarrow\; y = (-1)^n \arcsin\frac{1}{8} + \pi k,\; k \in \mathbb{Z}.$$

При этих значениях x и y левая часть обращается в ноль и неравенство верно.

Ответ: $x = \pm\arccos\left(\dfrac{1}{6}\right) + 2\pi n$, $y = (-1)^n \arcsin\dfrac{1}{8} + \pi k$, $n, k \in \mathbb{Z}$.