САММАТ-2026
1 марта 2026 г.
Решение задач 8 класса

Задача №1. Найдите четное трехзначное число, не содержащее цифру 0, если известно, что сумма квадратов чисел сотен и единиц не превосходит числа сотен, умноженного на четыре, а квадрат десятков отличается от квадрата суммы чисел сотен и единиц больше, чем на 45.

Решение. Число $100a + 10b + c$, $c \in \{2, 4, 6, 8\}$.

$$\begin{cases} a^2 + c^2 \leq 4a \\ (a+c)^2 + 45 < b^2 \end{cases}$$

$$a^2 + c^2 \leq 4a \Rightarrow a^2 - 4a + 4 \leq 4 - c^2 \Rightarrow (a-2)^2 \leq 4 - c^2 \Rightarrow 4 - c^2 \geq 0 \Rightarrow$$
$$c = \{1, 2\} \Rightarrow c = 2 \Rightarrow (a-2)^2 \leq 0 \Rightarrow a = 0$$

Из последнего неравенства $16 + 45 < b^2 \Rightarrow b^2 > 61 \Rightarrow b = \{8, 9\}$.

Получили 2 числа: 282 и 292.

Ответ: 2 числа: 282, 292.

Задача №2. Автомобилист должен переехать из одного города в другой. Если бы его скорость была бы 40 км/час, то на преодоление расстояния между городами он затратил бы на 3 часа больше, а при скорости 56 км/час на это расстояние он затратит на $2\frac{1}{7}$ часа меньше, чем это расстояние при настоящей скорости движения. Найти настоящую скорость и расстояние между городами.

Решение. $t_1 = \dfrac{S}{40}$, $t_2 = \dfrac{S}{56}$, $t = \dfrac{S}{v} \Rightarrow \begin{cases} \frac{S}{40} - \frac{S}{v} = 3 \\ \frac{S}{v} - \frac{S}{56} = 2\frac{1}{7} \end{cases} \Rightarrow \dfrac{S}{40} - \dfrac{S}{56} = 5\dfrac{1}{7} \Rightarrow$
$S\Big(\dfrac{1}{40} - \dfrac{1}{56}\Big) = 5\dfrac{1}{7} \Rightarrow \dfrac{S}{4}\Big(\dfrac{1}{10} - \dfrac{1}{14}\Big) = \dfrac{36}{7} \Rightarrow S = 140 \cdot \dfrac{36}{7} = 720$ (км).

$\dfrac{S}{v} = \dfrac{S}{40} - 3 = \dfrac{720}{40} - 3 = 15 \Rightarrow v = \dfrac{S}{15} = \dfrac{720}{15} = 48$ (км/час).

Ответ: $v = 48$ км/час, $S = 720$ км.

Задача №3. Установить, какое из чисел больше:

$$2026^{2026} + 2024^{2024} \text{ или } 2026^{2024} + 2024^{2026}.$$

Решение. Составим разность этих выражений

$$2026^{2026} + 2024^{2024} - (2026^{2024} + 2024^{2026}) =$$
$$= 2026^{2024}(2026^2 - 1) - 2024^{2024}(2024^2 - 1) > 0,$$

поскольку $2026^{2024} > 2024^{2024}$, $2026^2 - 1 > 2024^2 - 1 \Rightarrow$ число $2026^{2026} + 2024^{2024}$ больше, чем $2026^{2024} + 2024^{2026}$.

Ответ: $2026^{2026} + 2024^{2024}$ больше, чем $2026^{2024} + 2024^{2026}$.

Задача №4. Задан треугольник, попарная сумма сторон в котором равна 31, 32, 49. Около треугольника описана окружность. Найти площадь круга.

Решение. Пусть x, y, z — длины сторон треугольника. Тогда

$$\begin{cases} x+y=31 \\ y+z=32 \\ x+z=49 \end{cases} \Rightarrow 2(x+y+z)=112 \Rightarrow x+y+z=56$$

$$\begin{cases} z=56-(x+y)=56-31=25 \\ y=56-(x+z)=56-32=24 \\ x=56-(y+z)=56-49=7 \end{cases} \Rightarrow z^2=y^2+x^2$$

Значит треугольник прямоугольный, z — гипотенуза и это диаметр описанной окружности.

$$S=\frac{\pi D^2}{4}=\frac{\pi z^2}{4}=\frac{625}{4}\pi.$$

Ответ: $\dfrac{625}{4}\pi$.

Задача №5. Лодка плывет против течения реки. Собственная скорость лодки и течения реки постоянные. В 10 часов она встречает плот. В 10 часов 45 минут лодка развернулась в обратную сторону. Какое время будут показывать часы, когда лодка догонит плот?

Решение.

1 вариант: пусть u — скорость реки, v — скорость лодки. $S_1=(v-u)t_1$ ($t_1=\dfrac{3}{4}$ часа), $S_2=ut_1$, $S_3=ut \Rightarrow S_1+S_2+S_3=(u+v)t \Rightarrow (v-u)t_1+ut_1+ut=(u+v)t \Rightarrow vt_1+ut=(v+u)t \Rightarrow vt_1=vt \Rightarrow t=t_1$. 10 часов 45 минут + 45 минут = 11 часов 30 минут.

2 вариант (логическое рассуждение): лодка уплывала от плота со скоростью v и возвращалась обратно с этой же скоростью v по отношению к плоту. Таким образом, путешествие по течению заняло те же 45 минут, что и против течения.

Ответ: 11 часов 30 минут.

Задача №6. Решить уравнение:

$$3\sqrt{x-2}=\frac{x^2}{9}+2.$$

Решение. ОДЗ: $x \in [2,+\infty)$. Обозначим $y=\dfrac{x^2}{9}+2 \Rightarrow 3\sqrt{x-2}=y \Rightarrow 9(x-2)=y^2$ $\Rightarrow x=\dfrac{y^2}{9}+2$.

Система уравнений

$$\begin{cases} x=\dfrac{y^2}{9}+2 \\ y=\dfrac{x^2}{9}+2 \end{cases}$$

Вычтем из первого уравнения второе: $x-y=\dfrac{1}{9}(y^2-x^2) \Rightarrow (x-y)\left[1+\dfrac{1}{9}(x+y)\right]=0$ $\Rightarrow x=y$ или $x+y=-9$.

1) $x = y \Rightarrow \dfrac{x^2}{9} + 2 = x \Rightarrow x^2 - 9x + 18 = 0 \Rightarrow x_1 = 3,\ x_2 = 6.$

2) $x + y = -9 \Rightarrow y = -9 - x \Rightarrow \dfrac{x^2}{9} + 2 = -9 - x$ — нет действительных корней.

Ответ: $x_1 = 3$, $x_2 = 6$.

Задача №7. Заданы два отрезка a и b $(a > b)$. При помощи циркуля и линейки построить отрезок $\sqrt{\sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{a^2-b^2}}$. Все построения подробно описать.

Решение. 1) Строится прямоугольный треугольник с катетами a и b; гипотенуза будет $c = \sqrt{a^2+b^2}$;

2) Строится прямоугольний треугольник с гипотенузой a и катетом b; тогда второй катет $d = \sqrt{a^2-b^2}$;

3) На одной прямой откладываются последовательно отрезки c и d; отрезок $d+c$ делится пополам и строится окружность с радиусом $\dfrac{d+c}{2}$;

4) Из точки, где отрезки c и d соединяются, восстанавливается перпендикуляр до пересечения с окружностью; этот отрезок есть среднее геометрическое $\sqrt{d\cdot c} = \sqrt{\sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{a^2-b^2}}$.

Задача №8. Найти две последние цифры числа 2023^{2026}.

Решение.

$$2023 \equiv 23 \mod 100 \Rightarrow 2023^{2026} \equiv 23^{2026} \mod 100 \equiv 23^{26} \mod 100 \Rightarrow$$
$$23^2 = 529 \equiv 29 \mod 100$$
$$23^4 \equiv 29^2 = 841 \equiv 41 \mod 100$$
$$23^8 \equiv 41^2 = 1681 \equiv 81 \mod 100$$
$$23^{16} \equiv 81^2 = 6561 = 61 \mod 100$$
$$23^{26} = 23^{16}\cdot 23^8 \cdot 23^2 = 61\cdot 81\cdot 29 \mod 100 = 4941\cdot 29 \mod 100 =$$
$$= 41\cdot 29 \mod 100 = 1189 \mod 100 = 89 \mod 100.$$

Ответ: 89.

Задача №9. Докажите, что $5x^2 - 6xy + 5y^2 > 0$, если $x \neq 0$ и $y \neq 0$.

Решение.

$$5x^2 - 6xy + 5y^2 = 4x^2 - 2\cdot 2xy + y^2 + x^2 - 2xy + y^2 + 3y^2 =$$
$$= (2x-y)^2 + (x-y)^2 + 3y^2 > 0$$

при любых $x \neq 0$ и $y \neq 0$. Существуют и другие варианты разложения исходного многочлена на сумму квадратов чисел.

Задача №10. Найдите четырехзначное число, если известно, что при умножении этого числа на 9 получается четырехзначное число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке.

Решение. Число $a = 1$, поскольку при $a > 1$ получим пятизначное число. Число $d = 9$, поскольку только $9\cdot 9$ дает число единиц, равное 1. Далее

$$9(1000a + 100b + 10c + d) = 1000d + 100c + 10b + a.$$

Учитывая $a = 1$ и $d = 9$, получим

$$10c - 890b = 80.$$

Это равенство возможно лишь при $b = 0$, тогда $c = 8$. Искомое число: 1089.

Ответ: 1089.