

САММАТ-2026
1 марта 2026 г.
Решение задач 9 класса

Задача №1. Длины сторон треугольника ABC равны a , b и c . Известно, что $a^4 = b^4 + c^4$. Установить, угол A является острым, прямым или тупым.

Решение. Воспользуемся теоремой косинусов, так как по знаку косинуса можем ответить на вопрос задачи. Имеем:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A,$$

откуда

$$\begin{aligned} \cos A &= \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{b^2a^2 + c^2a^2 - a^4}{2a^2bc} = \\ &= \frac{b^2a^2 + c^2a^2 - b^4 - c^4}{2a^2bc} = \frac{b^2(a^2 - b^2) + c^2(a^2 - c^2)}{2a^2bc}. \end{aligned}$$

Так как $a^4 = b^4 + c^4$, то $a > b \Rightarrow a^2 > b^2$ и $a > c \Rightarrow a^2 > c^2$. Следовательно, числитель и знаменатель дроби положительны, т.е. $\cos A > 0$ и угол A острый.

Ответ: угол A острый.

Задача №2. Решить уравнение в целых числах:

$$\sqrt{yx^2 - 2025} = \frac{2026}{yx^2 + 1} - 1.$$

Решение. Обозначим $t = yx^2 + 1$, тогда уравнение примет вид

$$\sqrt{t - 2026} = \frac{2026}{t} - 1 \quad (t \geq 2026).$$

В левой части уравнения монотонно возрастающая функция, а в правой — монотонно убывающая. Поэтому $t = 2026$ — единственный корень. Следовательно, $yx^2 = 2025 = 45^2 = 9^2 \cdot 5^2 = 3^2 \cdot 15^2$.

Получим решения:

при $y = 2025$: $x = \pm 1$; при $y = 1$: $x = \pm 45$; при $y = 81$: $x = \pm 5$; при $y = 25$: $x = \pm 9$; при $y = 9$: $x = \pm 15$; при $y = 225$: $x = \pm 3$.

Ответ: $(1, 2025)$, $(-1, 2025)$, $(3, 225)$, $(-3, 225)$, $(5, 81)$, $(-5, 81)$, $(9, 25)$, $(-9, 25)$, $(15, 9)$, $(-15, 9)$, $(45, 1)$, $(-45, 1)$.

Задача №3. Лодка плывет по течению реки. Собственная скорость лодки и течения реки постоянные. В 13 часов лодка встречает плот и продолжает движение. В 13 часов 30 минут она повернула обратно. Какое время будут показывать часы, когда лодка встретит плот?

Решение.

1 вариант: пусть u — скорость реки, v — скорость лодки. $S_1 = (v - u)t_1$ ($t_1 = \frac{1}{2}$ часа), $S_2 = ut_1$, $S_3 = ut \Rightarrow S_1 + S_2 + S_3 = (u + v)t \Rightarrow (v - u)t_1 + ut_1 + ut = (u + v)t \Rightarrow vt_1 + ut = (v + u)t \Rightarrow vt_1 = vt \Rightarrow t = t_1$. 13 часов 30 минут + 30 минут = 14 часов.

2 вариант (логическое рассуждение): лодка уплывала от плота со скоростью v и возвращалась обратно с этой же скоростью v по отношению к плоту. Таким образом, путешествие по течению заняло те же 30 минут, что и против течения.

Ответ: 14 часов.

Задача №4. В группе процент спортсменов, занимающихся футболом, заключен в пределах от 5,9% до 6,1%. Определить наименьшее общее число спортсменов в группе и количество занимающихся футболом.

Решение. Пусть x — количество спортсменов в группе, а y — занимающихся из них футболом. Тогда

$$5,9 \leq \frac{100y}{x} \leq 6,1 \Rightarrow 59x \leq 1000y \leq 61x.$$

Решаем подбором. Пусть $y = 1$, тогда при $x = 16$ имеем $944 \leq 1000 \leq 976$ (не выполняется); при $x = 17$ имеем $1003 \leq 1000 \leq 1037$ (не выполняется). Для всех $x < 16$ и $x > 17$ неравенство не выполняется.

Пусть $y = 2$, тогда $59x \leq 2000 \leq 61x$. При $x = 32$ имеем $1888 \leq 2000 \leq 1952$ (не выполняется); при $x = 33$ имеем $1947 \leq 2000 \leq 2013$ (выполняется). Для всех $x < 32$ и $x > 33$ неравенство не выполняется.

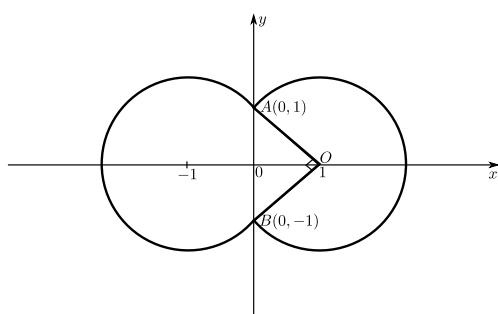
Ответ: 2 спортсмена футболисты; 33 — общее число спортсменов в группе.

Задача №5. Построить график кривой, заданной уравнением

$$x^2 - 2|x| + y^2 = 1,$$

и найти площадь фигуры, ограниченной этой кривой.

Решение. При $x \geq 0$ имеем $x^2 - 2x + y^2 = 1 \Rightarrow (x - 1)^2 + y^2 = (\sqrt{2})^2$. Это часть окружности с центром в точке $O(1,0)$, радиусом $R = \sqrt{2}$ и точками пересечения с осью OY : $A(0,1)$ и $B(0,-1)$. При $x < 0$ графиком будет часть окружности, симметричной относительно оси OY .



Поскольку $|OA| = |OB| = \sqrt{2}$, $|AB| = 2$, то угол $\angle AOB = \frac{\pi}{2}$, так как $\triangle AOB$ — прямоугольный.

Найдем площадь половины фигуры: она равна площади круга минус площадь сектора AOB и плюс площадь треугольника AOB .

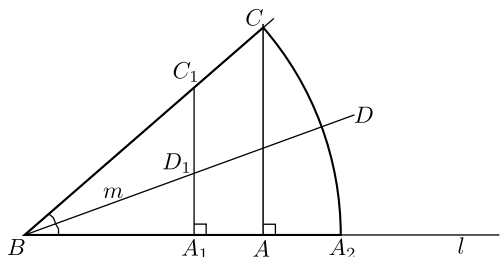
Имеем: $S_{\text{кр}} = \pi(\sqrt{2})^2 = 2\pi$; $S_{\text{сек}} = \frac{1}{2}(\sqrt{2})^2 \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$; $S_{\triangle AOB} = 1$. Тогда площадь половины фигуры равна $2\pi - \frac{\pi}{2} + 1 = \frac{3\pi}{2} + 1$, а площадь

всей фигуры — $3\pi + 2$.

Ответ: $3\pi + 2$.

Задача №6. При помощи циркуля и линейки построить прямоугольный треугольник, если известно, что косинус его острого угла равен $\frac{4}{5}$, а биссектриса, проведенная из вершины этого угла, имеет заданную длину m . Все этапы построения подробно описать.

Решение. 1) задаем отрезок m ;



2) строим прямой угол BAC : для этого выбираем любой отрезок длины e и откладываем на прямой l отрезки длины $4e$ и $5e$ (BA и BA_2) и восстанавливаем перпендикуляр AC к прямой l ;

3) строим окружность с центром в точке B и радиусом $OA_2 = 5e$, находим точку пересечения окружности со стороной AC (C — искомая точка), тогда в треугольнике BCA

$$\cos \angle B = \frac{BA}{BC} = \frac{4e}{5e} = \frac{4}{5};$$

4) строим биссектрису угла $\angle B$ (прямая BD) и на луче BD_1 находим точку D_1 такую, что $BD_1 = m$;

5) через точку D_1 проводим прямую, параллельную CA , пересечения этой прямой с лучами BA_2 и BC дают две точки A_1 и C_1 . Получаем искомый треугольник BC_1A_1 .

Задача №7. Найти разность между максимальным и минимальным значениями параметра a , при котором многочлены

$$N(x) = x^3 + 2x^2 + 2x + a \text{ и } M(x) = 2x^3 + 6x^2 + 2x - 2a$$

имеют хотя бы один общий корень.

Решение. Такая постановка задачи равносильна решению системы уравнений

$$\begin{cases} x^3 + 2x^2 + 2x + a = 0, \\ 2x^3 + 6x^2 + 2x - 2a = 0. \end{cases}$$

Умножим первое уравнение на 2 и сложим полученные:

$$4x^3 + 10x^2 + 6x = 0 \Rightarrow 2x(2x^2 + 5x + 3) = 0 \Rightarrow \\ x_1 = 0 \Rightarrow 2x^2 + 5x + 3 = 0 \Rightarrow x_2 = -1, x_3 = -\frac{3}{2}.$$

Рассмотрим 3 случая.

$$x_1 = 0 \Rightarrow a_1 = 0.$$

$$x_2 = -1 \Rightarrow (-1)^3 + 2(-1)^2 + 2(-1) + a = 0 \Rightarrow a_2 = 1.$$

$$x_3 = -\frac{3}{2} \Rightarrow a = -\left(-\frac{3}{2}\right)^3 - 2\left(-\frac{3}{2}\right)^2 - 2\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{27}{8} - \frac{9}{2} + 3 = -\frac{9}{8} + 3 = 1\frac{7}{8}.$$

$$\text{Значит: } a_{\min} = 0, a_{\max} = 1\frac{7}{8}, a_{\max} - a_{\min} = 1\frac{7}{8}.$$

$$\text{Ответ: } 1\frac{7}{8}.$$

Задача №8. Операция «факториал» определяется следующим образом: $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$. Найти трехзначное число, равное сумме факториалов своих цифр.

Решение. Число $7! > 1000$, поэтому цифры 7, 8, 9 не могут входить в число. $6! = 720$, цифра 6 не подходит. Далее перебором можно установить, что $1! + 4! + 5! = 145$.

Ответ: 145.

Задача №9. Решить неравенство:

$$(x^4 + x^2)(36x^2 - 12x + 1)\sqrt{-\frac{3}{2}x^2 + x - \frac{1}{6}} \leq 0.$$

Решение. $x^4 + x^2 \geq 0$ для любых x ; при $x = 0$ $x^4 + x^2 = 0$.

$36x^2 - 12x + 1 = (6x - 1)^2 \geq 0$ для любых x ; $6x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{6}$.

ОДЗ: $-\frac{3}{2}x^2 + x - \frac{1}{6} \geq 0 \Rightarrow -\frac{1}{6}(9x^2 - 6x + 1) = -\frac{1}{6}(3x - 1)^2 \geq 0$ удовлетворяется только при $x = \frac{1}{3}$.

Левая часть не может быть строго отрицательна, равенство же нулю возможно лишь при $x = 0$; $x = \frac{1}{3}$; $x = \frac{1}{6}$.

Ответ: $x = \left\{0; \frac{1}{3}; \frac{1}{6}\right\}$.

Задача №10. Определить остаток от деления суммы всех различных значений параметра p на единственный не кратный корень уравнения

$$(p^2 - 8p + 5)x^2 + x - 3 = 0.$$

Решение. Единственный некратный корень имеем при $p^2 - 8p + 5 = 0$, значит для корней этого уравнения имеем $p_1 + p_2 = 8$. Тогда единственный корень $x = 3$ и $\frac{8}{3} = 2(2)$. Остаток 2.

Ответ: 2.