

САММАТ-2021
Решение задач 6 класса
2 вариант

Задача №1. Найти минимальное пятизначное число, все цифры которого различны и при делении которого на 91 в остатке имеем 4.

Решение: Минимальное пятизначное число, при делении на 91 дающее целое число, $91 \times 110 = 10010$. Число, удовлетворяющее решению задачи с остатком 4, это 10014 (не подходит). Дальнейшие числа 10105 (не подходит), 10196 (не подходит), 10287 (подходит).

Ответ: 10287.

Задача №2. Из горячего крана ванна заполняется за 23 минуты, из холодного — за 17 минут. Маша открыла сначала горячий кран. Через сколько минут она должна открыть холодный кран, чтобы к моменту наполнения ванны горячей воды наполнилось в 1,5 раза больше, чем холодной?

Решение: $\frac{1}{23}$ — производительность горячего крана; $\frac{1}{17}$ — производительность холодного крана; x минут включен горячий кран, y — холодный кран. Тогда

$$\frac{x}{23} + \frac{y}{17} = 1. \quad (1)$$

Из условия задачи

$$\frac{x}{23} = \frac{3}{2} \frac{y}{17}. \quad (2)$$

Из (1) и (2) имеем $\frac{3}{2} \frac{y}{17} + \frac{y}{17} = 1 \Rightarrow \frac{5}{2} \frac{y}{17} = 1 \Rightarrow y = \frac{34}{5}$ (мин) $\Rightarrow y = 6,8$ мин.

Из (1) при известном y имеем $\frac{x}{23} + \frac{1}{17} \cdot \frac{34}{5} = 1 \Rightarrow \frac{x}{23} = \frac{3}{5} \Rightarrow x = \frac{23 \cdot 3}{5} = \frac{69}{5} = 13,8$ (мин)

$x - y = 7$ (мин)

Ответ: через 7 минут.

Задача №3. В примере на сложение a, b, c, d, e, f, g — цифры, причем различным буквам соответствуют различные цифры, a, c, e — не нули. Найти, какой цифре соответствует каждая буква, если справедливо

$$+ \begin{array}{r} a \ b \\ c \ d \\ \hline e \ f \ g \end{array}$$

Привести не менее шести таких примеров.

$$\begin{array}{l} \text{Примеры: } + \begin{array}{r} 2 \ 3 \\ 8 \ 4 \\ \hline 1 \ 0 \ 7 \end{array} + \begin{array}{r} 8 \ 4 \\ 2 \ 3 \\ \hline 1 \ 0 \ 7 \end{array} + \begin{array}{r} 4 \ 2 \\ 9 \ 5 \\ \hline 1 \ 3 \ 7 \end{array} + \begin{array}{r} 9 \ 5 \\ 4 \ 2 \\ \hline 1 \ 3 \ 7 \end{array} \\ + \begin{array}{r} 9 \ 6 \\ 5 \ 2 \\ \hline 1 \ 4 \ 8 \end{array} + \begin{array}{r} 5 \ 2 \\ 9 \ 6 \\ \hline 1 \ 4 \ 8 \end{array} + \begin{array}{r} 5 \ 3 \\ 8 \ 7 \\ \hline 1 \ 4 \ 0 \end{array} + \begin{array}{r} 8 \ 7 \\ 5 \ 3 \\ \hline 1 \ 4 \ 0 \end{array} \text{ и т.д.} \end{array}$$

Задача №4. Найдите все трехзначные числа, которые в 12 раз больше суммы своих цифр.

Решение: Пусть \overline{abc} — искомое число, где a, b, c — цифры, причем $a \neq 0$. Имеем $\overline{abc} = 12(a + b + c) \Rightarrow 100a + 10b + c = 12a + 12b + 12c \Rightarrow 88a = 2b + 11c$. Так как $88a = 2b + 11c \leq 2 \cdot 9 + 11 \cdot 9 = 117$, $a \neq 0$, то $a = 1$. Тогда $2b + 11c = 88 \Rightarrow 11c = 88 - 2b$. Поскольку $c, b \leq 9$, то $70 \leq 88 - 2b \leq 88$, откуда $c = 7$ или $c = 8$. При $c = 7$, b — не целое. При $c = 8$, $b = 0$. Получили трехзначное число 108.

Ответ: 108.

Задача №5. На 15 карточках написаны числа $1, 2, 3, 4, \dots, 13, 14, 15$. Можно ли распределить эти карточки между Мишей, Сашей и Ваней таким образом, что сумма чисел на карточках у каждого из них была одинаковой? Ответ обоснуйте.

Решение: Сумма натуральных чисел от 1 до 15 равна $\frac{15 \cdot 16}{2} = 120$. Если суммы одинаковые у всех, то они равны 40. Эту сумму можно получить, например, следующим образом: у Миши карточки с числами 1, 4, 5, 8, 9, 13; у Саши — 2, 3, 6, 7, 10, 12; у Вани — 11, 14, 15.

Задача №6. Две коровы за два дня дают 18 литров молока. Сколько литров молока дают четыре коровы за шесть дней?

Решение: 2 коровы за 2 дня дают 18 л.; 2 коровы за день дают 9 л.; 2 коровы за 6 дней дают $9 \cdot 6 = 54$ л.; 4 коровы за 6 дней дают $54 \cdot 2 = 108$ л.

Ответ: 108.

Задача №7. Петя и Маша купили лотерейные билеты с номерами 462758 и 439224 и обнаружили, что в каждом из номеров можно расставить знаки арифметических действий и скобки так, что в каждом случае результат будет равным 100. Как это можно сделать?

Ответ: $462758 = (4 + 6) \cdot 2 \cdot 7 - 5 \cdot 8 = 10 \cdot 14 - 40 = 100$, $439224 = 4 \cdot 3 \cdot 9 - 2 - 2 - 4 = 108 - 8 = 100$.

Задача №8. В семье четверо детей. Им 5, 8, 13 и 15 лет. Детей зовут Маша, Даша, Наташа и Коля. Сколько лет каждому ребенку, если известно, что одна девочка ходит в детский сад, Маша старше Коли, а сумма лет Маши и Наташи делится на 3.

Решение: Найдем возраст Коли. Так как в детский сад ходит девочка, то Коле не 5 лет. Так как Маша старше Коли, то Коле не 15 лет. Так как сумма лет Маши и Наташи делится на 3, то это возможно, когда одной девочке 8 лет, а другой 13, или одной 5, а другой 13, т.е. одной девочке 13 лет. Значит Коле не 13 лет, Коле 8 лет. Тогда Маше — 5 лет, а Наташе — 13 лет, или наоборот. Но так как Маша старше Коли, то Маше 13 лет, а Наташе 5. Даше 15 лет.

Ответ: Маше 13 лет, Даше 15 лет, Наташе 5 лет, Коле 8 лет.

Задача №9. Имеются чашечные весы и гирька массой 1 грамм. Как, воспользовавшись весами 11 раз, взвесить 2021 грамм сахара-песка, если после каждого взвешивания новая порция сахара отсыпается в отдельную емкость. Приведите последовательность взвешиваний.

Решение:

I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI
1 г	2 г	4 г	8 г	16 г	32 г	63 г	126 г	253 г	505 г	1011 г
1 г	1+1 г	1+3 г	1+7 г	1+15 г	1+31 г	63 г	126 г	1+252 г	505 г	1+1010 г

Сумма по всем граммам сахара $1+2+4+8+16+32+63+126+253+505+1011 = 2021$.

Задача №10. Имеется тринадцать плиток с одинаковой шириной в 10 см, но с разными длинами: 10 см, 20 см, 30см, ..., 120 см, 130 см. Можно ли из всех плиток сложить прямоугольник со сторонами, превосходящими 40 см? Если да, то приведите пример расположения плиток.

Решение: Можно. Пример расположения плиток.

130	
120	10
110	20
100	30
90	40
80	50
70	60