

САММАТ 2021 / 2022 (заключительный тур) 06 марта 2022г.  
Место проведения: Муниципальное бюджетное общеобразовательное учреждение «Лицей № 33»

Уважаемый участник олимпиады! На бланке указан Ваш уникальный номер. Не передавайте рабочие листы другим участникам для выполнения заданий. Пожалуйста, пользуйтесь темно-синей или черной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

Задача 2:

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + a_9}{a_3 + a_6 + a_9} = 1 + \frac{a_1 + a_2 + a_4 + a_5 + a_7 + a_8}{a_3 + a_6 + a_9}$$

$$a_1 + a_2 < 2a_3, \text{ т.к. } a_1 < a_3 \text{ и } a_2 < a_3$$

$$a_4 + a_5 < 2a_6, \text{ т.к. } a_4 < a_6 \text{ и } a_5 < a_6$$

$$a_7 + a_8 < 2a_9, \text{ т.к. } a_7 < a_9 \text{ и } a_8 < a_9$$

$$1 + \frac{a_1 + a_2 + a_4 + a_5 + a_7 + a_8}{a_3 + a_6 + a_9} < 1 + \frac{2a_3 + 2a_6 + 2a_9}{a_3 + a_6 + a_9} = 1 + 2 = 3$$

Значит,  $\frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + a_9 + a_{10}}{a_3 + a_6 + a_9} < 3$

Задача 4: Пусть  $x$  - количество черных шаров,  $y$  - количество белых шаров.  
Получим  $x + y = 30$  и  $x, y \in \mathbb{N}$

Среди любых 12 шаров есть хотя бы 1 белый, значит, черных не больше 11.  $x \leq 11$

Среди любых 20 шаров есть хотя бы 1 черный, значит, белых не больше 19;  $y \leq 19$

Получим  $x + y \leq 19 + 11 = 30$ . Значит,  $x = 11$ , а  $y = 19$ , иначе шаров будет меньше 30 штук.

Ответ: 19 белых шаров.





SAMMAT 2021 / 2022 (заключительный тур) 06 марта 2022г.  
Место проведения: Муниципальное бюджетное общеобразовательное  
учреждение «Лицей № 33»

Уважаемый участник олимпиады! На бланке указан Ваш уникальный номер. Не передавайте рабочие листы другим участникам для выполнения заданий. Пожалуйста, пользуйтесь темно-синей или черной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

Задача 7:  $a \equiv 7 \pmod{13}$   $15a^2 + 4a + 9 \equiv ? \pmod{13}$

$$15a^2 + 4a + 9 = (6a^2 + 8a + 1) - (a^2 + 4a + 4) + 12 = (4a + 1)^2 - (a + 2)^2 + 12$$

$$(4a + 1)^2 - (a + 2)^2 + 12 \stackrel{15}{=} (4 \cdot 7 + 1)^2 - (7 + 2)^2 + 12 \stackrel{13}{=} 3^2 - (-4)^2 - \frac{1}{13} \stackrel{13}{=} 9 - 16 - \frac{1}{13} \stackrel{13}{=} -8 \stackrel{13}{=} 5$$

Ответ:  $15a^2 + 4a + 9 \equiv 5 \pmod{13}$  (+)

Задача 9:

$$a + \frac{1}{b} = b + \frac{1}{c}; a - b = \frac{b - c}{bc}$$

$$b + \frac{1}{c} = c + \frac{1}{a}; b - c = \frac{c - a}{ac}$$

$$c + \frac{1}{a} = a + \frac{1}{b}; c - a = \frac{a - b}{ab}$$

Получа  $a - b = \frac{b - c}{bc} = \frac{c - a}{acbc} = \frac{a - b}{abacbc}$

Поэтому,  $abacbc(a - b) = (a - b); abacbc = 1; (abc)^2 = 1$   
(т.к.  $a \neq b$ )  $abc = \pm 1$

$$\begin{cases} abc = 1 \\ abc = -1 \end{cases}$$

Ответ:  $abc$  может принимать значения 1 и -1.





САММАТ 2021 / 2022 (заключительный тур) 06 марта 2022г.  
Место проведения: Муниципальное бюджетное общеобразовательное учреждение «Лицей № 33»

Уважаемый участник олимпиады! На бланке указан Ваш уникальный номер. Не передавайте рабочие листы другим участникам для выполнения заданий. Пожалуйста, пользуйтесь темно-синей или черной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

Задача 5: Пусть у нас есть 2 интересных числа  $a \Rightarrow m = a^2 + 4b^2$  и  $b \Rightarrow n = c^2 + 4d^2$ .

Проверим их произведение будет равно  $\oplus$

$$mn = (a^2 + 4b^2)(c^2 + 4d^2) = a^2c^2 + 4a^2d^2 + 4b^2c^2 + 16b^2d^2 =$$

$$= (a^2c^2 + 8abcd + 16b^2d^2) + 4(a^2d^2 - 2abcd + b^2c^2) = (ac + 4bd)^2 + 4(ad - bc)^2$$

Значит,  $mn$  - тоже интересное число

Ответ: Да, произведение двух чисел является интересным числом

Задача 8.

$$2^5 > 17 ; \text{значит } (17)^{2^{17}} < (2^5)^{2^{17}} = 2^{2^{17} \cdot 5}$$

Теперь сравним  $2^{2^{17} \cdot 5}$  и  $17^{2^{17}}$

$$2^{2^{17} \cdot 5} \sim 2^{2^{17}} \cdot (8,5)^{2^{17}}$$

$$5 < 8,5^{2^{17}}$$

$$\text{Значит, } 2^{2^{17}} > 2^{2^{17} \cdot 5} > 17^{2^{17}} \quad \oplus$$

$$\text{Ответ: } 2^{2^{17}} > 17^{2^{17}}$$





**САММАТ 2021 / 2022 (заключительный тур) 06 марта 2022г.**  
**Место проведения: Муниципальное бюджетное общеобразовательное учреждение «Лицей № 33»**

Уважаемый участник олимпиады! На бланке указан Ваш уникальный номер. Не передавайте рабочие листы другим участникам для выполнения заданий. Пожалуйста, пользуйтесь темно-синей или черной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

**Задача 3:**  $x^2 - |x+a+3| = |x-a-3| - (a+3)^2$

1) Если  $x+a+3 \geq 0$  и  $x-a-3 \geq 0$   $\begin{cases} x+a+3 \geq 0 \\ x-a-3 \geq 0 \end{cases}$

$$x^2 - x - a - 3 - x + a + 3 + (a+3)^2 = 0$$

$$x^2 - 2x + (a+3)^2 = 0$$

$$D = b^2 - 4ac, D = (-2)^2 - 4(a+3)^2 = 4(1 - a^2 - 6a - 9) = 0$$

$$\text{II} \text{ е } 1 - (a+3)^2 = 0 \quad \begin{cases} a+3=1 \\ a+3=-1 \end{cases} \quad \begin{cases} a=-4 \\ a=-2 \end{cases}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}; \quad x = \frac{2+0}{2} = 1$$

Проверим:  $\begin{cases} 1+4+3 \geq 0 \\ 1+4-3 \geq 0 \\ 1-2+3 \geq 0 \\ 1+2-3 \geq 0 \end{cases}$  Оба варианта подходят, т.е.

2) Если  $\begin{cases} x+a+3 \geq 0 \\ x-a-3 \leq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 - x - a - 3 - a - 3 + (a+3)^2 = 0 \\ x^2 + (a+3)(a+1) = 0 \end{cases}$

$$D = b^2 - 4ac, D = -4(a^2 + 4a + 3) = 0$$

$$\begin{cases} a+3=0 \\ a+1=0 \end{cases} \quad \begin{cases} a=-3 \\ a=-1 \end{cases}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}, \quad x = 0$$

Проверим:  $\begin{cases} 0-3+3 \geq 0 \\ 0+3-3 \geq 0 \\ 0-1+3 \geq 0 \\ 0+1-3 \leq 0 \end{cases}$

Подходит только вариант  $a = -3$

3) Если  $\begin{cases} x+a+3 \leq 0 \\ x-a-3 \geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 + x + a + 3 - x + a + 3 + (a+3)^2 \\ x^2 + (a+3)(a+5) = 0 \end{cases}$

$$D = b^2 - 4ac, D = -4(a+3)(a+5) = 0 \quad \begin{cases} a+3=0 \\ a+5=0 \end{cases} \quad \begin{cases} a=-3 \\ a=-5 \end{cases}$$





SAMMAT 2021 / 2022 (заключительный тур) 06 марта 2022г.  
Место проведения: Муниципальное бюджетное общеобразовательное  
учреждение «Лицей № 33»

Уважаемый участник олимпиады! На бланке указан Ваш уникальный номер. Не передавайте рабочие листы другим участникам для выполнения заданий. Пожалуйста, пользуйтесь темно-синей или черной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

Задача 3 (продолжение):

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}, x = 0; \text{ Проверим } \begin{cases} 0 - 3 + 3 \geq 0 \\ 0 + 3 - 3 \geq 0 \\ 0 - 5 + 3 \leq 0 \\ 0 + 5 - 3 \geq 0 \end{cases} \begin{array}{l} \text{Подходит только} \\ \text{вариант} \\ \underline{a = -3} \end{array}$$

$$\text{г) Если } \begin{cases} x + a + 3 \leq 0 \\ x - a - 3 \leq 0 \end{cases} \quad \begin{aligned} x^2 + x + a + 3 - 3 - a + x + (a + 3)^2 &= 0 \\ x^2 + 2x + (a + 3)^2 &= 0 \end{aligned}$$

$$D = b^2 - 4ac, D = 4 - 4(a + 3)^2 = 4(1 - (a + 3)^2) = 0$$

$$(a + 3)^2 = 1 \quad \begin{cases} a + 3 = 1 \\ a + 3 = -1 \end{cases}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}, x = -1$$

$$\begin{cases} a = -2 \\ a = -4 \end{cases} \text{ Проверим. } \begin{cases} -1 - 2 + 3 \geq 0 \\ -1 + 2 - 3 \leq 0 \\ -1 - 4 + 3 \leq 0 \\ -1 + 4 - 3 \geq 0 \end{cases}$$

оба варианта не подходят

Заметим, что при  $a = -2$  и  $a = -4$  уравнение будет иметь <sup>решения</sup> два ~~корня~~  $x = 1$  и  $x = -1$ . Тогда нам подходит только один вариант  $a = -3$ , т.к. при  $a = -3$  уравнение имеет только одно <sup>решение</sup> ~~корень~~  $x = 0$ .

Ответ. ~~а) При~~ При  $a = -3$  уравнение будет иметь только одно решение.





САММАТ 2021 / 2022 (заключительный тур) 06 марта 2022г.  
Место проведения: Муниципальное бюджетное общеобразовательное учреждение «Лицей № 33»

Уважаемый участник олимпиады! На бланке указан Ваш уникальный номер. Не передавайте рабочие листы другим участникам для выполнения заданий. Пожалуйста, пользуйтесь темно-синей или черной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

Задача 1:

$$D = b^2 - 4ac; \frac{1}{y} + 4 \cdot \frac{y^2}{2} = \frac{1}{y^2} + 2y^2 \geq 0$$

Полюса по теореме Виета:

$$x_1 + x_2 = -\frac{1}{y}, \text{ а } x_1 \cdot x_2 = -\frac{y^2}{2}$$

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 \cdot x_2 = \frac{1}{y^2} + y^2$$

$$x_1^4 + x_2^4 = (x_1^2 + x_2^2)^2 - 2x_1^2 \cdot x_2^2 = \frac{1}{y^4} + 2\frac{1}{y^2}y^2 + y^4 - 2 \cdot \frac{y^4}{2} = \frac{1}{y^4} + 2 + \frac{y^4}{2}$$

$$\frac{1}{y^4} + 2 + \frac{y^4}{2} \geq 2 + \sqrt{2}$$

$$\frac{1}{y^4} + \frac{y^4}{2} \geq 2\sqrt{\frac{1}{y^4} \cdot \frac{y^4}{2}} = 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \text{ По неравенству Коши}$$

$$\text{Значит, } \frac{1}{y^4} + \frac{y^4}{2} \geq \sqrt{2}, \quad \frac{1}{y^4} + 2 + \frac{y^4}{2} \geq 2 + \sqrt{2}$$

$$\text{То есть } x_1^4 + x_2^4 \geq 2 + \sqrt{2} \quad (+)$$

