№1

Решение!

синяя ручки?
где запись?

Чтобы избавиться от 4 степени, преобразуем неравенство. $x_1^4+x_2^4 \geq 2+\sqrt{2}$

$$(x_1^2+x_2^2)^2 \geq 2+\sqrt{2}+2x_1^2x_2^2$$

$$x^2+\frac{1}{y}x - \frac{y^2}{2}=0$$

По формуле дискриминанта:

$$x_1=\frac{-\frac{1}{y}+\sqrt{\frac{1}{y^2}+4\frac{y^2}{2}}}{2} \quad x_2=\frac{-\frac{1}{y}-\sqrt{\frac{1}{y^2}+4\frac{y^2}{2}}}{2}$$

$$x_1^2=\frac{\frac{1}{y^2}-2\frac{1}{y}\sqrt{\frac{1}{y^2}+2y^2}+\left(\frac{1}{y^2}+2y^2\right)}{2} \quad x_2^2=\frac{\frac{1}{y^2}+2\frac{1}{y}\sqrt{\frac{1}{y^2}+2y^2}+\left(\frac{1}{y^2}+2y^2\right)}{2}$$

Тогда $x_1^2+x_2^2=\cancel{\frac{2}{y^2}+2y^2}\ \frac{1}{y^2}+y^2+\frac{1}{y^2}+y^2$

По теореме Виета: $x_1x_2=-\frac{y^2}{2}$

$$2(x_1x_2)^2=\frac{y^4}{2}$$

Получается неравенство:

$$\left(2\left(\frac{1}{y^2}+y^2\right)\right)^2 \geq 2+\sqrt{2}+\frac{y^4}{2}$$

$$\frac{4}{y^4}+8+4y^4-\frac{y^4}{2} \geq 2+\sqrt{2}$$

$$\left(\frac{2}{y^2}\right)^2+\frac{7}{2}y^4 \geq 0; \quad 8 > 2+\sqrt{2} \Rightarrow$$

10б

$$\left(\frac{2}{y^2}\right)^2+\frac{7}{2}y^4+8 \geq 2+\sqrt{2}$$, ч.т.д.

№4

Решение:

Пусть $n_ч$ - кол-во чёрных шаров, $n_б$ - кол-во белых. Тогда $n_ч+n_б=30$.

По условию, $n_ч \leq 11$ (нельзя выбрать 12 черных), тогда $n_б \geq 19$.

С другой стороны, по условию $n_б \leq 19$. Значит, всего 19 белых шаров. 10б

Уважаемый участник олимпиады! На бланке указан Ваш уникальный номер. Не передавайте рабочие листы другим участникам для выполнения заданий. Пожалуйста, пользуйтесь темно-синей или черной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

Ответ: 19 шаров. 10б

№7

Решение:

Т.к. ост. от деления a на $13 = 7$, то

$15a^2+4a+9 \equiv 15\cdot 7^2+4\cdot 7+9 \pmod{13}$

$15\cdot 7^2 \equiv 15\cdot 10 \pmod{13}$

Ост. от $\frac{150}{13} = 7$ Ост. от $\frac{4\cdot 7}{13} = 2$

$\Rightarrow$ $15a^2+4a+9 \equiv 7+2+9 \pmod{13}$

$15a^2+4a+9 \equiv 5 \pmod{13}$

10б

Ответ: 5

№8

Решение: $2^{17} > 17^2$, т.к. уже $2^9 > 17^2$ (нетрудно посчитать). Тогда $(2^{17})^{17} > (17^2)^{17}$?

Ответ: $2^{17^{17}} > 17^{2^{17}}$

$(a^x)^y = a^{xy} \neq a^{x^y}$

2б

№2

Решение:

$$\frac{a_1+a_2+a_3+\ldots+a_8+a_9}{a_3+a_6+a_9}<3$$

$$\frac{a_1+a_2+a_4+a_5+a_7+a_8}{a_3+a_6+a_9}+1<3$$

Тогда остаётся доказать, что

$$a_1+a_2+a_4+a_5+a_7+a_8<2(a_3+a_6+a_9)$$

$$a_1+a_2+a_4+a_5+a_7+a_8<2a_3+2a_6+2a_9$$

Но $a_1+a_2<2a_3$; $a_4+a_5<2a_6$; $a_7+a_8<2a_9$,

значит и $(a_1+a_2)+(a_4+a_5)+(a_7+a_8)<2a_3+2a_6+2a_9$,

изначальное равенство верно, ч.т.д. 10б

№3

Решение:

$$x^2-|x+a+3|-|x-a-3|+(a+3)^2=0$$

Модули можно раскрыть 4-мя способами:

САММАТ 2021 / 2022 (заключительный тур) 06 марта 2022г.
Место проведения: ФГБОУ ВО «Самарский государственный технический университет»

Уважаемый участник олимпиады! На бланке указан Ваш уникальный номер. Не передавайте рабочие листы другим участникам для выполнения заданий. Пожалуйста, пользуйтесь темно-синей или черной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

1) $x^2-x-a-3-x+a+3+(a^2+6a+9)=0$

2) $x^2+x+a+3+x-a-3+(a^2+6a+9)=0$

3) $x^2-x-a-3+x-a-3+(a^2+6a+9)=0$

4) $x^2+x+a+3-x+a+3+(a^2+6a+9)=0$

---

1) $x^2-2x+(a^2+6a+9)=0$ $D=0$ при $a=-2;-4$

2) $x^2+2x+(a^2+6a+9)=0$ $D=0$ при $a=-2;-4$

3) $x^2+(a^2+4a+3)=0$ $D=0$ при $a=-1;-3$

4) $x^2+(a^2+8a+15)=0$ $D=0$ при $a=-5;-3$

Чтобы в изначальном уравнении был единственный, в каждом из 4 также должен быть один корень (причём одинаковый), но это условие не выполняется при одном a. Значит, не ~~у~~ существует параметра, при котором уравнение имело бы 1 корень.

Ответ: такого a не существует

∓

18 Попытка!

Уважаемый участник олимпиады! На бланке указан Ваш уникальный номер. Не передавайте рабочие листы другим участникам для выполнения заданий. Пожалуйста, пользуйтесь темно-синей или черной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

№ 10

Решение:

Если ax^2+bx+c имеет корни, то $b^2-4ac\geq 0$

~~Значит и~~ $\cancel{(b^2-4ac)^3>0}$

$\cancel{b^6-3\cdot b^4\cdot 4ac+3\cdot b^2\cdot 16a^2c^2-64a^3c^3}$

$b^2\geq 4ac$

$(b^2)^3\geq(4ac)^3$

$b^6>64a^3c^3$

$b^6>4a^3c^3$

$b^6-4a^3c^3>0$, значит корни у $a^3x^2+b^3x+c^3$ есть.

Ответ: да, имеет.

+ 8б Обоснование не полное!