№4

Всего 30 шаров.

Среди любых 12 ш. есть хотя бы 1 белый $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ белых шаров > 18. Если белых шаров 18 или меньше, то тогда мы сможем вытянуть другие 12 шаров (или больше), которые будут не белого цвета, что противоречит условиям задачи.

Среди любых 20 шаров есть хотя бы 1 чёрный $\Rightarrow$ черных > 10, т.к. если их меньше или равно 10, то мы сможем всегда вытянуть 20 шаров так, что среди них не будет ни одного чёрного шара $\Rightarrow$ Раз $ч + б = 30$, $ч > 10$; $б > 18$ $\Rightarrow$ Черных ш. может быть только 11 шт., а белых только 19.

⊕ 10б.

Ответ: 19 белых шаров.

№7.

$a \equiv 7 \pmod{13}$.

$15a^2 + 4a + 9 \equiv ? \pmod{13}$.

Раз $a \underset{13}{\equiv} 7 \Rightarrow 15a^2 \equiv 15 \cdot 49 \pmod{13}$.

$15a^2 \equiv 7 \pmod{13}$.

$4a \equiv 4 \cdot 7 \pmod{13}$.

$\Downarrow$

$4a \equiv 2 \pmod{13}$; $9 \equiv 9 \pmod{13}$. $\Rightarrow$

$\Rightarrow 15a^2 + 4a + 9 \equiv 7 + 2 + 9 \pmod{13} \Rightarrow$

$\Rightarrow 15a^2 + 4a + 9 \equiv 5 \pmod{13}$

Ответ: 5.

⊕ 10б.

№9

$a \neq b$; $b \neq c$; $a \neq c$; $a \cdot b \cdot c = ?$

$a + \frac{1}{b} = b + \frac{1}{c} = c + \frac{1}{a}$;

$a + \frac{1}{b} = b + \frac{1}{c} \Rightarrow a - b = \frac{1}{c} - \frac{1}{b} = \frac{b-c}{bc}$;

$b + \frac{1}{c} = c + \frac{1}{a} \Rightarrow b - c = \frac{1}{a} - \frac{1}{c} = \frac{c-a}{ac}$; $\Rightarrow$

$c + \frac{1}{a} = a + \frac{1}{b} \Rightarrow c - a = \frac{1}{b} - \frac{1}{a} = \frac{a-b}{ab}$;

$\Rightarrow (a-b)+(b-c)+(c-a) = \frac{b-c}{bc}^{\backslash a} + \frac{c-a}{ac}^{\backslash b} + \frac{a-b}{ab}^{\backslash c}$;

$0 = \frac{ab - ac + bc - ab + ac - bc}{abc}$;

$0 = \frac{0}{abc}$; $\Rightarrow abc = 0$. ?

Неверно!

(Г) 2б

Ответ: $abc = 0$;

№2

$0 < a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5 < a_6 < a_7 < a_8 < a_9$;

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_8 + a_9}{a_3 + a_6 + a_9} < 3;$$

$\Downarrow$

$a_1 + a_2 + \ldots + a_9 < 3a_3 + 3a_6 + 3a_9$;

Т.к. $\left.\begin{array}{l} a_1 < a_3; \\ a_2 < a_3; \\ a_3 = a_3; \end{array}\right| \Rightarrow a_1 + a_2 + a_3 < 3a_3;$

$\left.\begin{array}{l} a_4 < a_6; \\ a_5 < a_6; \\ a_6 = a_6; \end{array}\right| \Rightarrow a_4 + a_5 + a_6 < 3a_6;$

$\left.\begin{array}{l} a_7 < a_9; \\ a_8 < a_9; \\ a_9 = a_9; \end{array}\right| \Rightarrow a_7 + a_8 + a_9 < 3a_9;$

$\Rightarrow \dfrac{a_1 + a_2 + \ldots + a_9}{a_3 + a_6 + a_9} < 3;$

ч.т.д.

+ 10б.

№5.

$\exists$ Есть 2 интересных числа x и $y \in \mathbb{N}$.
x представимо в виде $x = a^2 + 4b^2$;
а y в виде $y = c^2 + 4d^2$; $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$.

Д-ть: $x \cdot y$ - интер. число. $\Rightarrow$
$\Rightarrow (a^2+4b^2)(c^2+4d^2) = a^2c^2 + 4a^2d^2 + 4b^2c^2 + 16b^2d^2$;
$\Leftrightarrow xy = a^2c^2 + 4a^2d^2 + 4b^2c^2 + 16b^2d^2 + 8abcd - 8abcd$;
$\Leftrightarrow xy = (a^2c^2 - 8abcd + 16b^2d^2) + 4(a^2d^2 + 2abcd +$
$+ b^2c^2) = (ac - 4bd)^2 + 4(ad + bc)^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow \exists\, m = (ac - 4bd)$; $n = (ad + bc)$

$\Downarrow$

$m^2 + 4n^2 = xy$. $\Rightarrow$ Произведение двух интересных чисел также является интересным числом.

(+) 10б.

Ответ: Является.

№10.

ax^2+bx+c имеет корни

$\Downarrow$

$D>0. \Rightarrow b^2-4ac>0.$; $b^2>4ac$;

$\Downarrow$

$(b^2)^3>(4ac)^3$;

$\Downarrow$

$b^6>64a^3c^3$;

$a^3x^2+b^3x+c^3$;

$D_2=(b^3)^2-4a^3c^3$;

$D_2=b^6-4a^3c^3$;

3 степень - нечётная степень $\Rightarrow$

$\Downarrow$

a и a^3 имеют один и тот же знак. c и c^3, b^2 и b^6...

$\Downarrow$

Раз $b^6-64a^3c^3>0$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow a^3x^2+b^3x+c^3$ - имеет корни.

$\Rightarrow b^6-4a^3c^3>0.$

⊕ 10б.

Ответ: Имеет.

№1.

$y \neq 0;$

$x^2 + \frac{x}{y} - \frac{y^2}{2} = 0;$

$x^2 + bx + c = 0;$

$\Downarrow$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{1}{y}; \\ x_1 \cdot x_2 = -\frac{y^2}{2}; \end{cases}$$

Д-ть: $x_1^4 + x_2^4 \geq 2+\sqrt{2}$

$(x_1^2 + x_2^2)^2 - 2x_1^2x_2^2 \geq 2+\sqrt{2};$

$((x_1+x_2)^2 - 2x_1x_2)^2 - 2x_1^2x_2^2 \geq 2+\sqrt{2};$

$\left(\left(-\frac{1}{y}\right)^2 - 2\cdot\left(-\frac{y^2}{2}\right)\right)^2 - 2\cdot\left(-\frac{y^2}{2}\right)^2 \geq 2+\sqrt{2};$

$\Downarrow$

$\left(\frac{1}{y^2} + y^2\right)^2 - 2\frac{y^4}{4} \geq 2+\sqrt{2};$

$\frac{1}{y^4} + 2 + y^4 - 2\frac{y^4}{4} \geq 2+\sqrt{2};$

$\frac{1}{y^4} + y^4 - 2\frac{y^4}{4} \geq \sqrt{2};$

Т.к. ~~это~~ ур-ие имеет 2 кор-ня $\Rightarrow D>0 \Rightarrow$

$\Rightarrow b^2 - 4ac = \frac{1}{y^2} + 4\frac{y^2}{2} > 0;$ Не обоснован!

$\frac{1}{y^2} > 0$, т.к. $y \neq 0$.

$\frac{1}{y^2} + 2y^2 > 0; \Rightarrow 1 + 2y^4 > 0;$

$1 > -2y^4; \Rightarrow$

$\Rightarrow \underbrace{\frac{1}{y^4}}_{>0} + \underbrace{y^4}_{>0} + \underbrace{\frac{-2y^4}{4}}_{<1} \geq \sqrt{2};$ Недоделан!

y - действ. число. $\Rightarrow$ ч.т.д.

7 6б.

№3

$x^2 - |x+a+3| = |x-a-3| - (a+3)^2;$

$\exists\, t = a+3;$

$x^2 - |x+t| = |x-t| - t^2;$

$x^2 + t^2 = |x-t| + |x+t|;$

$\Downarrow$

Раз $x^2 > 0$ всегда, тогда при любом x, кроме $x = 0$; ур-ие будет иметь 2 решения, т.к. $(-x)^2 = x^2$; $x^2 = x^2$;

и $|x-t| + |x+t| = x^2 + t^2$

$\Rightarrow$ при $x = 0$;

$\Rightarrow t^2 = 2|t|; \Rightarrow t(t-2) = 0;$

Потерян!

$\begin{cases} t = 0; \\ t = 2; \end{cases} \quad \begin{cases} a+3 = 0; \\ a+3 = 2; \end{cases} \Rightarrow$

7 6б,

$\Rightarrow a_1 = -3;\ a_2 = -1;$ Неверно! Не все корни найдены!

Ответ: $a = -3; -1.$