№1 $x^2 + \frac{1}{y}\cdot x - \frac{y^2}{2} = 0$

По теореме Виета:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{1}{y} \\ x_1 \cdot x_2 = -\frac{y^2}{2} \end{cases}$$

$$x_1^4 + x_2^4 = (x_1^2 + x_2^2)^2 - 2x_1^2x_2^2 = ((x_1+x_2)^2 - 2x_1x_2)^2 - 2x_1^2x_2^2 =$$

$$= \left(\left(-\frac{1}{y}\right)^2 - 2\cdot\left(-\frac{y^2}{2}\right)\right)^2 - 2\cdot\left(-\frac{y^2}{2}\right)^2 =$$

$$= \left(\frac{1}{y^2} + y^2\right)^2 - 2\cdot\frac{y^4}{4} = \left(\frac{1}{y^2}+y^2\right)^2 - \frac{y^4}{2} = \frac{1}{y^4} + 2 + y^4 - \frac{y^4}{2} =$$

$$= \frac{2 + 4y^4 + 2y^8 - y^8}{2y^4} = \frac{y^8 + 4y^4 + 2}{2y^4}$$

$\frac{y^8+4y^4+2}{2y^4} \geq 2\sqrt{2}$ $\Big| \cdot 2y^4$, т.к. $y^4 \geq 0$, то знак неравенства сохраняется.

$$\Updownarrow$$

$y^8 + 4y^4 + 2 \geq 2\cdot(2y^4) + 2\sqrt{2}y^4$

$$\Updownarrow$$

$y^8 + 4y^4 + 2 \geq 4y^4 + 2\sqrt{2}y^4$

$$\Updownarrow$$

$y^8 - 2\sqrt{2}y^4 + 2 \geq 0$ (+) 10б.

$$\Updownarrow$$

$(y^4 - \sqrt{2})^2 \geq 0$, а квадрат любого числа, число неотрицательное, ч.т.д.

№5 возмем 2 произвольных интересных числа

$\exists$ это будут m^2+4n^2 и a^2+4b^2, где $m,n,a,b \in \mathbb{Z}$

$(m^2+4n^2)(a^2+4b^2) = a^2m^2 + 4b^2m^2 + 4n^2a^2 + 16n^2b^2 =$

$= (a^2m^2 + 16n^2b^2 + 8nbam) - 8nbam + 4b^2m + 4n^2a^2 =$ 10б. (+)

$= (am + 4nb)^2 + 4(b^2m^2 - 2(bm)\cdot(an) + n^2a^2) = (am+2nb)^2 + 4(bm \mp an)^2$, ч.т.д.

N2 $\frac{a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+a_7+a_8+a_9}{a_3+a_6+a_9} \cancel{\geq} 3$

$\Updownarrow$

$\frac{a_1+a_2+a_4+a_5+a_7+a_8}{a_3+a_6+a_9} < 2$

$\Updownarrow$

$\begin{cases} \frac{a_1+a_5+a_7}{a_3+a_6+a_9} < 1 \\ \frac{a_2+a_4+a_8}{a_3+a_6+a_9} < 1 \end{cases}$

Заметим, что: $+\begin{array}{l} a_1 < a_3 \\ a_5 < a_6 \\ a_7 < a_9 \end{array}$ $\Updownarrow$ $\Bigg| + \begin{array}{l} a_2 < a_3 \\ a_4 < a_6 \\ a_8 < a_9 \end{array}$ $\Updownarrow$

$a_1+a_5+a_7 < a_3+a_6+a_9$

$a_2+a_4+a_8 < a_3+a_6+a_9$

А, т.к. все числа ~~неп~~ положительные, то:

$\begin{cases} \frac{a_1+a_5+a_7}{a_3+a_6+a_9} < 1 \\ \frac{a_2+a_4+a_8}{a_3+a_6+a_9} < 1 \end{cases}$, ч.т.д

(7) 12б.

N7

$a \underset{13}{\equiv} 7$

$a^2 \underset{13}{\equiv} 49 \underset{13}{\equiv} 10$

$15 \underset{13}{\equiv} 2$

$15a^2 \underset{13}{\equiv} 10 \cdot 2 \underset{13}{\equiv} 20 \underset{13}{\equiv} 7$

$4a \underset{13}{\equiv} 28 \underset{13}{\equiv} 2$

$15a^2 + 4a \underset{13}{\equiv} 9$

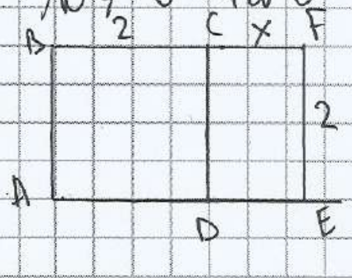
$15a^2 + 4a + 9 \underset{13}{\equiv} 18 \underset{13}{\equiv} 5$ (+) 10б.

Ответ: 5.

N10 ~~Т.к. ax^2+bx+c имеет корни, значит $D \geq 0$ значит $b^2-4ac \geq 0$~~

~~Рассмотрим Дискриминант уравнения $a^3x+b^3x+c^3$ $D = b^6 - 4a^3b^3$~~

N6



Пусть $CF = x$, тогда, т.к. $CFDE \sim ABFE \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{2+x}{2} = \frac{2}{x}$

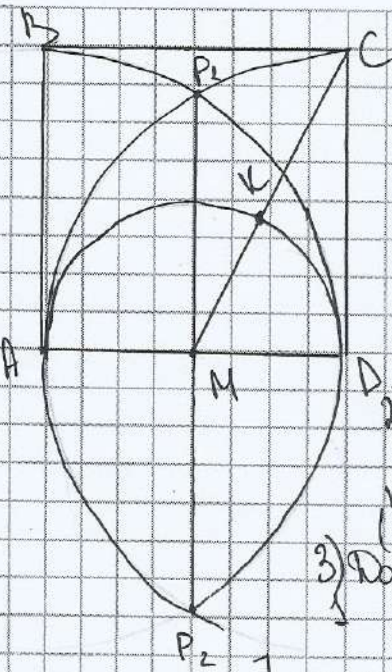
$2x + x^2 = 4$

$x^2 + 2x - 4 = 0$

$x_1 = \frac{-2+\sqrt{4+16}}{2} = \sqrt{5} - 1 \Rightarrow x = \sqrt{5}-1$

$x_2 = \frac{-2-\sqrt{4+16}}{2} = -1-\sqrt{5} < 0$, что не подходит

1) Найдем середину AD. Для этого возьмём циркуль раствором в AD и начертим 2 окружности из точки A и D. Соединим их точки пересечения, и точка в которой этот отрезок пересечёт AD будет его середина



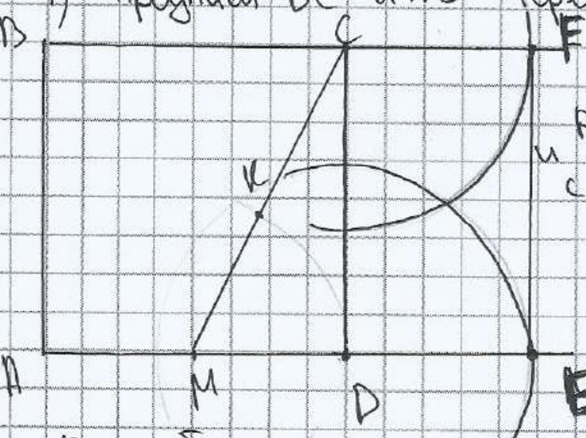
Это будет именно середина т.к $AP_1 = AP_2$, т.к. это радиус одной окружности и $P_1D = P_2D$ аналогично а $AP_1 = P_1D$, т.к. мы использовали один и тот же раствор циркуля. А т.к. все стороны равны значит AP_1DP_2 это ромб, ~~а его~~ а P_1P_2 и AD — это его диагонали, а они делят точкой пересечения друг-друга пополам.

2) Обозначим точку пересечения AD и P_1P_2 M. Проведём MC, т.к $CD=2$, а $MD = \frac{1}{2}AD = 1$, то MC (по теореме Пифагора) равна $\sqrt{5}$. $(1^2+2^2=5)$

3) Далее возьмём раствор циркуля равный MD, то есть 1 и проведём окружность с центром M.

] точка пересечения MC с MD будет K. Т.к. $MK = 1$, то $CK = \sqrt{5}-1$.

4) Продлим BC и AD через C и D соответственно.



Возьмем циркуль с раствором равным $CK = \sqrt{5}-1$ и ~~с цент~~ нарисуем окружность с центами в точках C и D. Соединим EF.
Т.к. $BL = AN$, $BL \parallel AN$ и $\angle ABL = 90^\circ$ то $ABFE$ — прямоугольник.
и $CD = DE$, $CD \parallel DE$ и $\angle DCF = 90^\circ$, то $DCFE$ — прямоугольник.

Они оба прямоугольники и отношения их сторон равна.

$$\frac{2+\sqrt{5}-1}{2} = \frac{2}{\sqrt{5}-1} \qquad 4 = (2+\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}-1) = 2\sqrt{5}-2+5-\sqrt{5}-\sqrt{5}+1 = 4$$

+ 10б.

№4 Заметим, что белых шариков хотя бы 19, иначе если их хотя бы 18, то останется как минимум 12 чёрных шариков, а нам известно, что среди любых 12 шариков есть хотя бы 1 белый. Значит белых как минимум 19.

Также заметим, что чёрных шариков хотя бы 11, иначе если их 10 или меньше, то найдётся хотя бы 20 белых шариков, но по условию такого быть не может. Значит чёрных хотя бы 11.

Если черных хотя бы 11, а белых хотя бы 19, а сумма белых и чёрных 30, значит белых 19, а чёрных 11.

Ответ: 19.

+ 10б.

№3 Рассмотрим все случаи раскрытия модуля.

1) $x \geq a+3$
$x \geq -a-3$

$x^2-x-a-3 = x-a-3-(a+3)^2$
$x^2-2x+(a+3)^2=0$

$D = 4-4(a+3)^2$, а т.к. ур-е имеет 1 решение, то $D=0 \Rightarrow 4=4(a+3)^2 \Rightarrow (a+3)^2=1 \Rightarrow$
$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} a+3=-1 \Rightarrow a=-4 \\ a+3=+1 \Rightarrow a=-2 \end{array}\right.$

2) $x \leq a+3$
$x \geq -a-3$
$x^2-x-a-3 = -x+a+3-(a+3)^2$
$x^2-2a-6+a^2+6a+9=0$
$x^2+a^2+4a+3=0$
$D = 4(a^2+4a+3) \Rightarrow a^2+4a+3=0$
$a_1 = -3$
$a_2 = -1$

САММАТ 2021 / 2022 (заключительный тур) 06 марта 2022г.
Место проведения: ФГБОУ ВО “Национальный исследовательский Мордовский государственный университет им. Н.П. Огарёва”, факультет математики и информационных технологий

Уважаемый участник олимпиады! На бланке указан Ваш уникальный номер. Не передавайте рабочие листы другим участникам для выполнения заданий. Пожалуйста, пользуйтесь темно-синей или черной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

3) $x \leq -a-3$

$x \geq a+3$

$x^2+x+a+3 = x-a-3-(a+3)^2$

$x^2+2a+6+a^2+6a+9=0$

$x^2+a^2+8a+15=0$

$\Downarrow$

~~$a^2+8a+9=0$~~

~~$D = 64-36 = 28$~~

~~$a = \frac{-8 \pm \sqrt{28}}{2} = -4 \pm \sqrt{7}$~~

$a^2+8a+15=0$

$a_1=-5$

$a_2=-3$

3) $x \leq -a-3$

$x \leq a+3$

$x^2+x+a+3 = -x+a+3-(a+3)^2$

$x^2+2x+(a+3)^2=0$

$4 = 4(a+3)^2$

$a_1=-2$

$a_2=-4$

Ответ: $-1; -2; -3; -4; -5$.

Не единств. решение!

(+) 4б.

Неверно!

Регистрационный №
11859-11859-3758

Страница 06 из 07

САММАТ 2021 / 2022 (заключительный тур) 06 марта 2022г.
Место проведения: ФГБОУ ВО “Национальный исследовательский Мордовский государственный университет им. Н.П. Огарёва”, факультет математики и информационных технологий

Уважаемый участник олимпиады! На бланке указан Ваш уникальный номер. Не передавайте рабочие листы другим участникам для выполнения заданий. Пожалуйста, пользуйтесь темно-синей или черной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

№8 $2^{17^{17}} \vee 17^{2^{17}}$

$\Updownarrow$

$(2^{17})^{17^{16}} \vee 17^{2^{17}} \Leftrightarrow (2^{17})^{17^{16}} \vee (17^2)^{2^{16}}$

$2^{17} = 131072$ $\qquad$ $17^2 = 289$

$\cancel{131072^{17^{16}} \vee 17^{2^{17}}}$ $\qquad$ $131072^{17^{16}} \vee 289^{2^{16}}$

$\cancel{131072 > 17}$ $\qquad$ $131072 > 289$

$\cancel{17^{16} \vee 2^{17}}$ $\qquad$ $17^{16} \vee 2^{16}$

$\cancel{17^{16} \vee 16}$ $\qquad$ $17^{16} > 2^{16}$

$\Downarrow$

$131072^{17^{16}} > 289^{2^{16}}$

$\Updownarrow$

$2^{17^{17}} > 17^{2^{17}}$

Ответ: $2^{17^{17}} > 17^{2^{17}}$ ⊕ 10б.