САММАТ 2021 / 2022 (заключительный тур) 06 марта 2022г.
Место проведения: ГБНОУ ПО «Губернский лицей»

Задача 1

$$x_1^4+x_2^4 = x_1^4+2x_1^2x_2^2+x_2^4-2x_1^2x_2^2 =$$
$$=(x_1^2+x_2^2)^2-2x_1^2x_2^2 = (x_1^2+2x_1x_2+x_2^2-2x_1x_2)^2-2(x_1x_2)^2=$$
$$=((x_1+x_2)^2-2x_1x_2)^2-2(x_1x_2)^2$$

$$x^2+\frac{1}{y}\cdot x-\frac{y^2}{2}=0$$

По теореме Виета

$$x_1\cdot x_2 = -\frac{y^2}{2}$$
$$x_1+x_2=-\frac{1}{y}$$

~~Подставим в верхнее уравнение~~

Подставим в верхнее выражение

$$\left(\left(-\frac{1}{y}\right)^2-2\left(-\frac{y^2}{2}\right)\right)^2-2\left(-\frac{y^2}{2}\right)^2=\left(\frac{1}{y^2}+y^2\right)^2-\cancel{2\frac{y^4}{4}}\frac{y^4}{2}=$$
$$=\frac{1}{y^4}+2+y^4-\frac{y^4}{2}=\frac{1}{y^4}+\frac{y^4}{2}+2=\frac{1}{y^4}-\sqrt{2}+\frac{y^4}{2}+\sqrt{2}+2=$$
$$\cancel{=\frac{1}{y^4}}=\left(\frac{1}{y^2}\right)^2-\sqrt{2}-\left(\frac{y^2}{\sqrt{2}}\right)^2+\sqrt{2}+2=\left(\frac{1}{y^2}\right)^2-\frac{2}{\sqrt{2}}-\left(\frac{y^2}{\sqrt{2}}\right)^2+\sqrt{2}+2=$$
$$=\left(\frac{1}{y^2}-\frac{y^2}{\sqrt{2}}\right)^2+\sqrt{2}+2$$

Заметим, что $\left(\frac{1}{y^2}-\frac{y^2}{\sqrt{2}}\right)^2\geq 0$, а значит всё выражение $\geq\sqrt{2}+2$

10б

Регистрационный №
10070-10070-3690

Страница 1 из 11

Задача 2

$0<a_1<a_2<a_3<a_4<a_5<a_6<a_7<a_8<a_9$

Заметим, что

$$\underbrace{a_3+a_3+a_3}+\underbrace{a_6+a_6+a_6}+\underbrace{a_9+a_9+a_9}>$$
$$>\underbrace{a_1+a_2+a_3}+\underbrace{a_4+a_5+a_6}+\underbrace{a_7+a_8+a_9}$$

т.к. $a_3+a_3+a_3>a_1+a_2+a_3$ т.к. $a_3>a_2$ и $a_3>a_1$
и ~~так~~ с остальными тройками аналогично

Значит:

$$\frac{3a_3+3a_6+3a_9}{a_3+a_6+a_9}>\frac{a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+a_7+a_8+a_9}{a_3+a_6+a_9}$$

т.к. знаменатели равны, а числитель 1-ой дроби больше.

Тогда:

$$\frac{3(a_3+a_6+a_9)}{a_3+a_6+a_9}=3>\frac{\cancel{a_3}\, a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+a_7+a_2+a_9}{a_3+a_6+a_9}$$

Что и требовалось доказать 10б

Задача 3.

Пусть $a+3=t$, тогда:

$x^2-|x+t|-|x-t|+t^2=0$

Раскроем модули четырьмя вариантами и сделаем проверку для каждого варианта.

1) $x+t\geq 0$ и $x-t\geq 0$

$x^2-x-t-x+t+t^2=0$

$x^2-2x+t^2=0$

$D=4-4t=0$ т.к. только при $D=0$, уравнение будет иметь 1 корень

$t=1$

~~проверка:~~

$x^2-2x+1=0$

$(x-1)^2=0 \quad x=1$

Проверка: $x+t\geq 0 \quad 2\geq 0$ - подходит

$x-t\geq 0 \quad 0\geq 0$ - подходит

2) $x+t\geq 0$ и $x-t\leq 0$

$x^2-x-t+x-t+t^2=0$

$x^2-2t+t^2=0$

$D=0-4(-2t+t^2)=0+8t-4t^2=0$ (аналогично 1-ому случаю)

$8t-4t^2=0$

$t(8-4t)=0$

$\left[\begin{array}{l} t=0 \\ t=2 \end{array}\right.$

при $t=0$: $x^2=0 \Rightarrow x=0$

при $t=2$: $x^2=2\cdot 2-2^2=0$ $x=0$

Проверка:

при $t=0$: $0+0\geq 0$ и $0-0\leq 0$ - подходит

при $t=2$ $0+2\geq 0$ и $0-2\leq 0$ - подходит

Ответ?

5б Рассуждение не доведено до ответа!

Задача 4

Пусть: x - белых шариков y - черних.

$x+y=30$

Заметим, что если в коробке есть 12 черних шариков, то выбрав их мы не найдем среди них белого шарика - противоречие

$y \leq 11$

Заметим, что если в коробке есть 20 белых шариков, то выбрав их мы не найдем среди них черного шарика противоречие

$x \leq 19$

Тогда, заметим, что ~~значение~~ $x+y=30$ выполняется только при максимальном значении x и y, тоесть при $x=19$ и $y=11$

(предположим, что $x \leq 18$, тогда $y=30-x$, то есть $y \geq 12$ - противоречие. Значит $x=19$, а $y=11$)

Ответ: белых - 19
черних - 11 10б

Задача 5

Ответ: да

10б

Доказательство:

Возьмем 2 любых красивых числа.

Пусть это m^2+4n^2 и x^2+4y^2.

Докажем, что их произведение можно представить как k^2+4p^2 (k и p - целые)

$(m^2+4n^2)(x^2+4y^2)=(mx)^2+(2nx)^2+(2ym)^2+(4ny)^2=$

$=(mx)^2-8mxny+(4ny)^2+(2nx)^2+8mxny+(2ym)^2=$

$=(mx-4ny)^2+(2nx+2ym)^2=(mx-4ny)^2+4(nx+ym)^2$

$k=mx-4ny$ — целое (разность 2-ух целых)

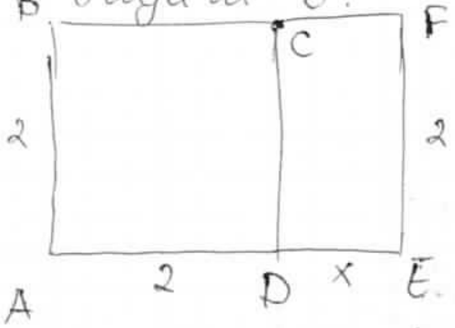
$p=nx+ym$ — целое (сумма 2-ух целых)
(произведение 2-ух целых - целое)

Тогда:

$(m^2+4n^2)(x^2+4y^2)=k^2+4p^2$

Что и требовалось доказать

Задача 6.



Из подобия: $\frac{DE}{AB} = \frac{EF}{AE}$

Пусть, $DE = CF = \cancel{8}x$

$\frac{2}{x} = \frac{2+x}{2}$

$4 = 2x + x^2$

не верное разложение

$x^2+2x-4=0 \quad x^2+2x+4-8=0 \quad (x+2)^2-(\sqrt{8})^2=0$

$(x+2-\sqrt{8})(x+2+\sqrt{8})=0$

$\left[\begin{array}{l} x=\sqrt{8}-2 \\ x=-\sqrt{8}-2 <0 \end{array}\right.$ — значит нам не подходит, т.к. сторона — положительна

$\sqrt{8}$

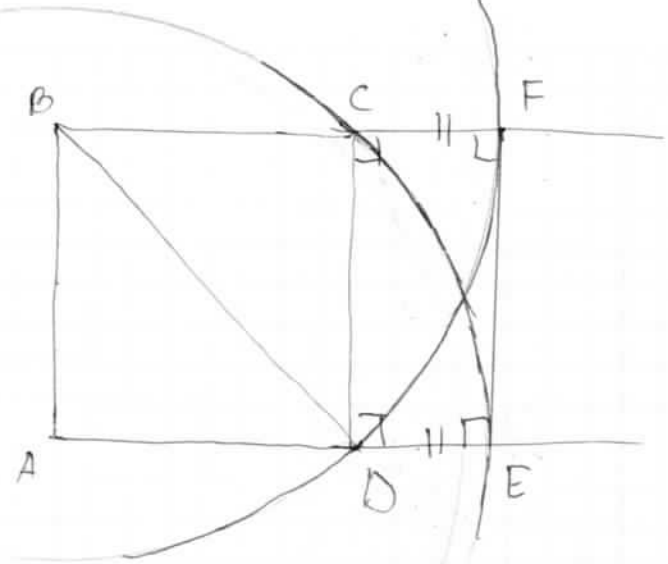
$x=\sqrt{8}-2$

$x=2\sqrt{2}-2$

Как строить:

Продлим BC и AD за точки C и D.

Построим окружность с центром в B и ~~диаметром~~ радиусом BD



Точка пересечения окружности с центром B и BC пусть точка F

В $\triangle BCD$ по теор. пифагора $BC^2+CD^2=BD^2$

$BD=\sqrt{2^2+2^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$

BF = BD - оба отрезка (~~диаметри~~ радиусы) одной окружн.

$CF=BF-BC=2\sqrt{2}-2$

Аналогично построим окружность с ц. A и ~~д~~ радиусом AC.

точка пересечения с AD = E (AE = BF ; AD = BC)

Тогда аналогично $DE=AE-AD=2\sqrt{2}-2$

Соединим линейкой точки F и E и полученный ~~четырех~~ четырехугольник CFED будет подобен ~~с~~ ▭ ABFE.

Задача 7

Пусть $a = 13k + 7$ (k - целое)

$15a^2 + 4a + 9 = 13a^2 + 2a^2 + 4a + 9 =$

$= 13a^2 + 2a(a+2) + 9 = 13a^2 + 2(13k+7)(13k+9) + 9 =$

$= (26k+14)(13k+9) + 13a^2 + 9 =$

$= 13a^2 + \underbrace{\underbrace{(26k+13+1)}_{\text{ост } 1}\underbrace{(13k+9)}_{\text{ост } 9}}_{\text{ост } 9} + 9$ (остатки на 13)

(при умножении остатки перемножаются)

$\underbrace{13a^2}_{\text{ост } 0} + \underbrace{(26k+13+1)(13k+9)}_{\text{ост } 9} \underbrace{+9}_{\text{ост } 9}$

При сложении остатки складываются:

$0 + 9 + 9 = 18 = 13 + 5$ - остаток 5

Ответ: остаток 5

10б

Задача 8

$2^{17^{17}} > 2^{16^{17}} = 2^{(2^4)^{17}} = 2^{2^{68}}$

$17^{2^{17}} < 256^{2^{17}} = (2^8)^{2^{17}} = 2^{8\cdot 2^{17}} = 2^{2^3\cdot 2^{17}} = 2^{2^{20}}$

$2^{17^{17}} > 2^{2^{68}} > 2^{2^{20}} > 17^{2^{17}}$

$\Downarrow$

$2^{17^{17}} > 17^{2^{17}}$

10

Задача ~~9~~ 10

$ax^2+bx+c=0$

имеет корни, значит $D\geq 0$

$D=b^2-4ac\geq 0$

$b^2\geq 4ac$ обе части неравенства возведем в нечетную степень (3)

$b^6\geq 64a^3c^3$

Сравним b^6 и $4a^3c^3$:

1) $ac\geq 0$:

$64(ac)^3\geq 4(ac)^3$ т.к. $16(ac)^3\geq (ac)^3$

$b^6\geq 64(ac)^3\geq 4(ac)^3$

$b^6\geq 4(ac)^3$

2) $ac \leq 0$

Тогда: $b^6 \geq 0$ т.к 6 - четная степень

$4(ac)^3 \leq 0$

$b^6 \geq 4(ac)^3$

Рассмотрим ~~кв. трехчлен~~ уравнение

$a^3x^2 + b^3x + c^3 = 0$

$D = b^6 - 4a^3c^3$

$b^6 - 4a^3c^3 \geq 0$, т.к. $b^6 \geq 4a^3c^3$ (это мы уже доказали)

Если дискриминант больше либо равен 0, то уравнени имеет корни.

Примечание:

В своем решении я предположил, что уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ может иметь 2 либо 1 корень, и использовал знак $\geq$ и $\leq$ для дискриминанта. Но если уравнение $ax^2 + bx + c$ имеет ровно 2 корня, то и уравнение $a^3x^2 + b^3x + c^3 = 0$ имеет ровно 2 корня, т.к. дискриминант будет строго больше 0

105