№1.

$x^2+\frac{1}{y}\cdot x-\frac{y^2}{2}=0$. По теореме Виета:

$$\begin{cases} x_1+x_2=-\frac{1}{y} \\ x_1x_2=-\frac{y^2}{2}. \end{cases}$$

Найдем $x_1^2+x_2^2$:

$x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-x_1x_2\cdot 2=\left(-\frac{1}{y}\right)^2-\left(-\frac{y^2}{2}\right)\cdot 2=\frac{1}{y^2}+y^2$;

Найдем $x_1^4+x_2^4$:

$x_1^4+x_2^4=(x_1^2+x_2^2)^2-2\cdot x_1^2x_2^2=\left(\frac{1}{y^2}+y^2\right)^2-2\cdot\left(-\frac{y^2}{2}\right)^2=\frac{1}{y^4}+2+y^4-\frac{2y^4}{4}=\frac{1}{y^4}+$

$+2+y^4-\frac{y^4}{2}$. Докажем, что это $\geq\sqrt{2}+2$.

$\frac{1}{y^4}+2+y^4-\frac{y^4}{2}\geq 2+\sqrt{2}$.

+

$\frac{1}{y^4}+y^4-\frac{y^4}{2}\geq\sqrt{2}$.

$\frac{2+2y^8-y^8}{2y^4}\geq\sqrt{2}$. $\quad 2+y^8\geq\sqrt{2}\cdot 2y^4$. Составим разность:

$2+y^8-2y^4\cdot\sqrt{2}=(\sqrt{2}-y^4)^2\geq 0$, значит, искомое утверждение верно.

САММАТ 2021 / 2022 (заключительный тур) 06 марта 2022г.
Место проведения: Муниципальное бюджетное общеобразовательное учреждение «Лицей № 33»

Уважаемый участник олимпиады! На бланке указан Ваш уникальный номер. Не передавайте рабочие листы другим участникам для выполнения заданий. Пожалуйста, пользуйтесь темно-синей или черной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

N.2.

$$\frac{a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+a_7+a_8+a_9}{a_3+a_6+a_9} \overset{<}{\cancel{\geq}} 3$$

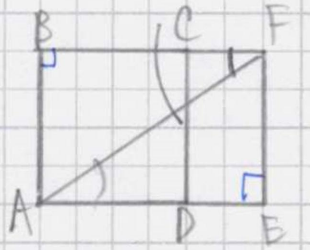
+

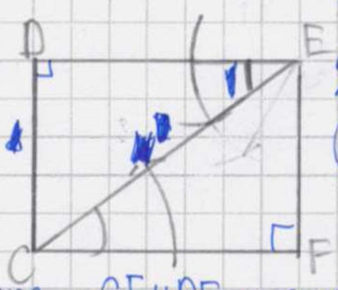
$a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+a_7+a_8+a_9<3a_3+3a_6+3a_9.$

Заметим, что $3a_3>a_1+a_2+a_3$ (из условия), $3a_6>a_4+a_5+a_6$, $3a_9>a_7+a_8+a_9$,

тогда искомое неравенство верно при $0<a_1<a_2<a_3<\ldots<a_9$.

N.6.





1) ~~Построим~~ $\angle DEC$ ~~$\angle 1$~~ $=\angle AFB$.

2) ~~Проведем $EF\perp$~~ Проведем CE, лежащий на луче угла 1 (отметим точку C на луче E).

3) ~~Построим $CF \parallel DE$, для этого~~ $\angle ECF$

1) Изначально отметим DE — сторону $CDEF \sim ABFE$.

2) ~~$d \perp DE$,~~ & $DC\perp DE$, $\angle DEC=\angle BFA$ (треугольник по стороне и 2 углам). $DC\cap EC=C$.

3) $EF\perp DE$, $\angle ECF=\angle DEC$, $EF\cap CF=F$.

4) $CDEF \sim ABFE$.

Доказательство:

$\triangle DEC \sim \triangle ABF$ ($\angle BFA=\angle DEC$, $\angle ABF=\angle CDE$), поэтому $DC : AB = DE : BF$.

$\triangle CEF \sim \triangle AFE$ ($\angle ECF = \angle DEC = \angle BFA = \angle FAE$, $\angle CFE = \angle AEF$). Тогда ~~CE~~ $\frac{CF}{AE} = \frac{EF}{FE}$. И, наконец, внутри каждого из прямоугольников $\triangle ABF \sim \triangle FBA$ и $\triangle CDE \sim \triangle EFC$ (равные углы отмечены). Тогда $\frac{CF}{AE} = \frac{EF}{FE} = \frac{DC}{AB} = \frac{DE}{BF}$ (сверху — стороны нового, а снизу — начального прямоугольника). Все углы у прямоугольников равны $90°$, их отношения сходственных сторон равны и, следовательно, $CDEF \sim ABFE$.

Исследование:

Решений бесконечно много.

(–)

№4.

Пусть белых шаров в коробке x, тогда черных — $30-x$. По принципу Дирихле в коробке не меньше, чем $30-12+1=19$ белых и не меньше, чем $30-20+1=11$ черных:

$$\begin{cases} x \geq 19 \\ 30-x \geq 11 \\ x \in N \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq 19 \\ -x \geq -19 \\ x \in N \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq 19 \\ x \leq 19 \\ x \in N \end{cases} \quad x=19.$$

(+)

Ответ: в коробке 19 белых шаров.

№7.

N.7.

$a \equiv 7 \pmod{13}$.

$a^2 \equiv 49 \pmod{13}$

$a^2 \equiv 10 \pmod{13}$.

$15a^2 \equiv 150 \pmod{13}$.

$15a^2 \equiv 7 \pmod{13}$.

$4a \equiv 28 \pmod{13}$.

$4a \equiv 2 \pmod{13}$.

$15a^2 + 4a \equiv 9 \pmod{13}$

$15a^2 + 4a + 9 \equiv 18 \pmod{13}$.

$15a^2 + 4a + 9 \equiv 5 \pmod{13}$.

N.8.

Воспользуемся тем, что если $a < b < c$, то $a < c$. Сравним $2^{17^{17}}$ с $32^{2^{17}}$, ведь $32^{2^{17}} > 17^{2^{17}}$.

$2^{17^{17}} \vee 32^{2^{17}}$

$2^{17^{17}} \vee (2^5)^{2^{17}}$

$2^{17^{17}} \vee 2^{5\cdot 2^{17}}$. Докажем, что $17^{17} > 5\cdot 2^{17}$. Для этого поделим 17^{17} на $5\cdot 2^{17}$:

$\frac{17^{17}}{2^{17}\cdot 5} = \left(\frac{17}{2}\right)^{17} : 5 = (8,5)^{17} : 5$. Ясно, что это значение > 1, значит, $17^{17} > 2^{17}\cdot 5$, а значит, $2^{17^{17}} > 32^{2^{17}}$, а так как $32^{2^{17}} > 17^{2^{17}}$, то $2^{17^{17}} > 17^{2^{17}}$

№10.

$ax^2+bx+c=0$, так как многочлен имеет корни, то:

$D \geq 0$, $b^2-4ac \geq 0 \Rightarrow b^2 \geq 4ac$.

$a^3x^2+b^3x+c^3$, $D = b^6-4a^3c^3$.

Если $4ac$ — число ~~отрицательное~~ не положительное, то поскольку $b^6 \geq 0$, ~~то~~ а $4a^3c^3 \leq 0$ и мы вычитаем из положительного отрицательное, то $D \geq 0$. Если $4ac$ — число ~~положительное~~ неотрицательное, то:

$b^2 \geq 4ac$, возведём в куб, на что имеем право из-за $4ac \geq 0$:

$b^6 \geq 64a^3c^3$.

$b^6-64a^3c^3 \geq 0$. Если $b^6-64a^3c^3 \geq 0$, то так как $64a^3c^3 \geq 4a^3c^3$ при $a \geq 0, c \geq 0$, то $b^6-4a^3c^3 \geq 0$, значит D у $a^3x^2+b^3x+c^3$ неотрицателен, следовательно, многочлен имеет корни.

N.3.

$x^2-|x+a+3|=|x-a-3|-(a+3)^2$ $\qquad$ $\cancel{a^2+}\ x^2+(a+3)^2=|x+a+3|+|x-a-3|$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\geqslant a+3\\ x^2+(a+3)^2=x+a+3+x-a-3\end{cases}\\ \begin{cases}x\leqslant -a-3\\ -x+a+3-x-a-3=x^2+(a+3)^2\end{cases}\\ \begin{cases}-a-3<x<a+3\\ -x+a+3+x+a+3=x^2+(a+3)^2\end{cases}\end{array}\right.
\qquad
\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\geqslant a+3\\ 2x=x^2+(a+3)^2\end{cases}\\ \begin{cases}-2x=x^2+(a+3)^2\\ x\leqslant -a-3\end{cases}\\ \begin{cases}-a-3<x<a+3\\ 2a+6=x^2+(a+3)^2.\end{cases}\end{array}\right.$$

Все эти уравнения имеют корни при $a\in$ ~~[-1; -3~~ $[-3;-1]$. Как известно, один корень у совокупности подобных систем может быть если он совпадающий у всех уравнений. Корни совпадут в граничных точках данного промежутка, то есть в -1 и в -3.

Ответ: 1 корень при $a=-1$; в $a=-3$.

N.5.

Да, является. $(m^2+4n^2)(k^2+4p^2)=m^2k^2+4n^2k^2+16n^2p^2+4m^2p^2$, из чисел $m^2k^2+4n^2k^2$ и $16n^2p^2+4m^2p^2$ можно выделить корень, и тогда искомое утв. верно.