САММАТ 2021 / 2022 (заключительный тур) 06 марта 2022г.
Место проведения: Муниципальное бюджетное общеобразовательное учреждение «Лицей № 33»

Уважаемый участник олимпиады! На бланке указан Ваш уникальный номер. Не передавайте рабочие листы другим участникам для выполнения заданий. Пожалуйста, пользуйтесь темно-синей или черной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

№2

$0<a_1<a_2<a_3\dots<a_9$

Доказать: $\dfrac{a_1+a_2+a_3+a_4+\dots+a_9}{a_3+a_6+a_9}<3$

$$\frac{a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+a_7+a_8+a_9}{a_3+a_6+a_9}-3=\frac{a_1+a_2+a_3+\dots+a_9-3a_3-3a_6-3a_9}{a_3+a_6+a_9}=$$

$$=\frac{a_1+a_2-2a_3+a_4+a_5-2a_6+a_7+a_8-2a_9}{a_3+a_6+a_9}=\cancel{(a_1-a_3)+(}$$

$$=\frac{(a_1-a_3)+(a_2-a_3)+(a_4-a_6)+(a_5-a_6)+(a_7-a_9)+(a_8-a_9)}{a_3+a_6+a_9}.$$

Т.к. все пары: (a_1-a_3); (a_2-a_3); $(a_4-a_6)\dots$; $(a_8-a_9)<0$, то и их сумма <0.

Т.к. $a_3>0$; $a_6>0$; $a_9>0$, то $a_3+a_6+a_9>0$

Значит, $\dfrac{(a_1-a_3)+(a_2-a_3)+(a_4-a_6)+(a_5-a_6)+(a_7-a_9)+(a_8-a_9)}{a_3+a_6+a_9}<0$

(т.к. $-n:m=-k$, где $n>0$, $m>0$, $k>0$)

Тогда $\dfrac{a_1+a_2+a_3+\dots+a_8+a_9}{a_3+a_6+a_9}<3$ соответственно, при

$0<a_1<a_2<a_3\dots<a_9$.

Регистрационный №
33699-33699-4372

№4.

Т.к. ~~в~~ ~~каждых~~ среди любых 12 шаров есть хотя бы один белый, то в наихудшем случае мы вытаскиваем 11 черных шаров и последний остаётся белый.
Соответственно максимальное кол-во черных шаров в коробке - 11 шт.

Т.к. среди любых 20 шаров есть хотя бы 1 черный, то в наихудшем случае мы вытаскиваем 19 белых шаров и последний наверняка должен быть черным.
Значит белых шаров в коробке не более 19.

Если мы берём максимальное возможное кол-во черных и белых шаров, то всего в коробке: $11+19=30$ шаров.

Именно столько нам и дано по условию задачи.
Значит в коробке 19 белых шаров.

Ответ: 19 белых шаров лежит в коробке.

№7

$a=13k+7$.

$15a^2+4a+9=15(13k+7)^2+4(13k+7)+9=15(169k^2+182k+49)+$

$+52k+28+9=2535k^2+2730k+735+52k+37=$

$=\cancel{2495k^2}+2535k^2+2782k+772$

$$\cancel{\frac{2495k^2+2782k+772}{13}=\frac{2495}{13}k^2+\frac{2782}{13}k+\frac{772}{13}=}$$

$$\cancel{=\left(191+\frac{12}{13}\right)k^2+214k+}$$

$$\frac{2535k^2+2782k+772}{13}=\frac{2535}{13}k^2+\frac{2782}{13}k+\frac{772}{13}=$$

$$=195k^2+214k+59+\frac{5}{13}.$$

+

Вывод: остаток от деления $15a^2+4a+9$ на 13 − 5.

Ответ: 5.

5б

$ax^2+bx+c=0$ $\quad$ $a^3x^2+b^3x+c^3=0$

$D=b^2-4ac\geq 0$ $\quad$ $D=b^6-4a^3c^3$

При $b^6-4a^3c^3\geq 0$ корни есть.

$$\begin{cases} b^2-4ac\geq 0 \\ b^6-4a^3c^3\geq 0 \end{cases}$$

Такие неравенства соблюдаются, например, при $a=-1$, $b=1$, $c=2$

Значит, если ax^2+bx+c имеет корни, то и $a^3x^2+b^3x+c^3$ может иметь корни.

−

№1

$$x^2 + \frac{x}{y} - \frac{y^2}{2} = 0$$

$$D = \frac{1}{y^2} + 4\cdot\frac{y^2}{2} = \frac{1}{y^2} + 2y^2 = \frac{1+2y^4}{y^2}$$

$$\left[\begin{array}{l} x_1 = \dfrac{-\frac{1}{y} + \frac{\sqrt{1+2y^4}}{y}}{2} \\ x_2 = \dfrac{-\frac{1}{y} - \frac{\sqrt{1+2y^4}}{y}}{2} \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} x_1 = \dfrac{\sqrt{1+2y^4}-1}{2y} \\ x_2 = \dfrac{-\sqrt{1+2y^4}-1}{2y} \end{array}\right.$$

Доказать: $x_1^4 + x_2^4 \geq 2+\sqrt{2}$

$$\left(\frac{\sqrt{1+2y^4}-1}{2y}\right)^4 + \left(\frac{-\sqrt{1+2y^4}-1}{2y}\right)^4 - 2 - \sqrt{2} =$$

$$= \frac{(\sqrt{1+2y^4}-1)^4}{16y^4} + \frac{(\sqrt{1+2y^4}+1)^4}{16y^4} - 2 - \sqrt{2} =$$

$$= \frac{4y^8 - 8y^4\sqrt{1+2y^4} + 16y^4 - 8\sqrt{1+2y^4} + 8 + 4y^8 + 8y^4\sqrt{1+2y^4} + 16y^4 + 8\sqrt{1+2y^4} + 8}{16y^4} -$$

$$- 2 - \sqrt{2} = \frac{8y^8 + 32y^4 + 16}{16y^4} - 2 - \sqrt{2} = \cancel{\frac{8y^8+32y^4+16-32y^4}{}} -$$

$$= \frac{8y^8 + 32y^4 + 16 - 32y^4 - 16\cdot\sqrt{2}y^4}{16y^4} = \frac{8y^8 - 16\cdot\sqrt{2}y^4 + 16}{16y^4} =$$

$$= \frac{y^8 - 2\sqrt{2}y^4 + 2}{y^4} = \frac{(y^4-\sqrt{2})^2}{y^4} \geq 0, \text{ т.к. } (y^4-\sqrt{2})^2 \geq 0, \; y^4 > 0 \text{ т.к. } y \neq 0.$$

Значит, $x_1^4 + x_2^2 \geq 2+\sqrt{2}$.

№8

$2^{17^{17}} \vee 17^{2^{17}}$

$17^{2^{17}} < 32^{2^{17}} = 2^{5\cdot 2^{17}} < 2^{2^{20}}$

$2^{17^{17}} \vee 2^{2^{20}}$

$17^{17} \vee 2^{20}$, $17^{17} > 16^{17} = 2^{4\cdot 17} = 2^{68}$

$17^{17} > 2^{68} > 2^{20} > \cancel{2^{5\cdot 2^{17}} > 17^{2^{17}}}$

Тогда $2^{17^{17}} > 2^{2^{20}} > 2^{5\cdot 2^{17}} > 17^{2^{17}}$.

Тогда $2^{17^{17}} > 17^{2^{17}}$

Ответ: $2^{17^{17}} > 17^{2^{17}}$

+

№5

$(a^2+4b^2)(x^2+4y^2) = a^2x^2 + 4y^2a^2 + 4b^2x^2 + 16y^2b^2 =$
$= (ax)^2 + 4(y^2a^2 + 4y^2b^2 + b^2x^2)$. Чтобы число было интересным нужно чтобы $(ya)^2 + 4y^2b^2 + (bx)^2 = n^2$.
Это случится, если
$ya\cdot bx = 2y^2b^2$
$a\cancel{x} = 2yb$

−

Значит, произведение двух интересных чисел: a^2+4b^2 и x^2+4y^2 будет интересным ~~ab~~ только в том случае, если $ax = 2yb$.